Uitwerking deeltentamen B Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 21 juni 2010

Opgave 1 [20pt] Onderzoek of het lineaire randwaardeprobleem op $[1, e^\pi]$:

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{3}{x}\, y' + \dfrac{4}{x^2}\, y &= 0, \\ y(1) = y(e^\pi) &= 0, \end{cases}$$

een oplossing heeft die niet identiek gelijk aan nul is.

De differentiaalvergelijking is een *vergelijking van Euler* die equivalent is met

$$Ly = x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

Voor de functie $y = x^r$ geldt

$$L(x^r) = r(r-1)x^r - 3rx^r + 4x^r = (r^2 - 4r + 4)x^r = (r-2)^2 x^r\ .$$

Het polynoom $f(r) = (r-2)^2$ heeft één nulpunt $r_1 = 2$ met multipliciteit 2. Hieruit volgt dat

$$y_1(x) = x^2 \quad \text{en} \quad y_2(x) = x^2 \ln x$$

twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn van $Ly = 0$. De algemene oplossing op $x > 0$ van deze differentiaalvergelijking is

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ax^2 + Bx^2 \ln x$$

met willekeurige $A, B \in \mathbb{R}$. De randvoorwaarden impliceren:

$$\begin{cases} A &= 0, \\ A + \pi B &= 0. \end{cases}$$

Dit stelsel heeft alleen de triviale oplossing $A = B = 0$. Dus heeft het randwaardeprobleem *geen* oplossingen die niet identiek gelijk aan nul zijn.

Opgave 2 [30pt] Beschouw de vergelijking

$$\ddot{q} = -U'(q), \quad U(q) = \frac{q^4}{4} - \frac{q^3}{3}. \tag{1}$$

1. Herschrijf (1) als een stelsel van differentiaalvergelijkingen voor q en $v = \dot{q}$. Vind alle rustpunten van dit stelsel.

   Het stelsel is

$$\begin{cases} \dot{q} &= v, \\ \dot{v} &= -q^2(q-1). \end{cases} \tag{2}$$

   Dit stelsel heeft twee rustpunten: $O = (0, 0)$ en $E = (1, 0)$.

2. Schets zo nauwkeurig mogelijk het faseplaatje van het stelsel, d.w.z. teken de banen in het (q, v)-vlak. Zet ook pijltjes. *Hint*: Let op kritieke waarden van U.

De potentiele energie $U(q)$ heeft een minimum in $q = 1$ omdat $U'(1) = 0$ maar $U''(1) = 1 > 0$. De kritieke waarde is $U(1) = -\frac{1}{12} < 0$. Hieruit volgt dat het rustpunt E een centrum is.

Het punt $q = 0$ is ook een kritieke punt voor $U(q)$ maar is geen maximum of minimum: $U'(0) = U''(0) = 0$ en $U'''(0) = -2$. Beschouw de niveau-verzameling $\mathcal{E} = 0$ van de totale energie

$$\mathcal{E}(q, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{q^4}{4} - \frac{q^3}{3}$$

waarin het rustpunt O zit. Deze verzameling is gegeven door

$$v = \pm\sqrt{\frac{2q^3}{3} - \frac{q^4}{2}}, \quad 0 \leq q \leq \frac{4}{3}$$

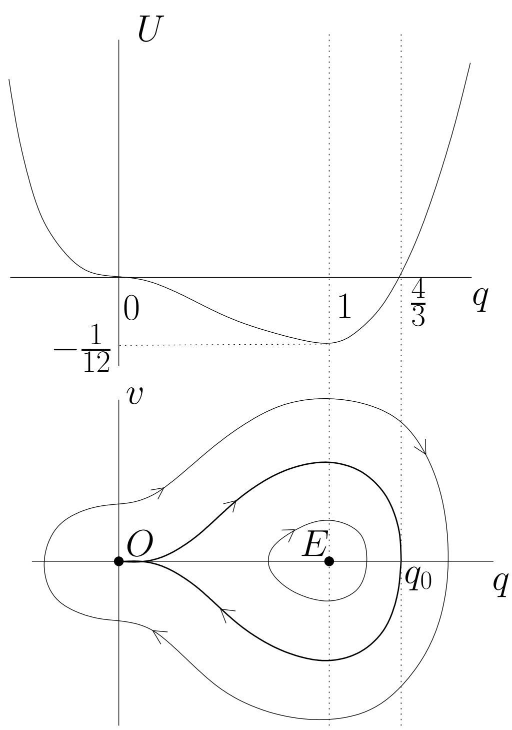
en is een gesloten kromme die niet continu-differentieerbar in O is. Voor kleine waarden $q \geq 0$ hebben we

$$v \approx \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\, q^{3/2}.$$

De kromme bestaat uit *twee* banen: het rustpunt O en een baan met $q > 0$. Voor iedere oplossing die hoort bij de tweede baan geldt

$$\lim_{t \to \pm\infty} (q(t), v(t)) = (0, 0),$$

omdat O de einige rustpunt is in deze niveau-verzameling.



Het faseplaatje van (2) bestaat uit twee rustpunten $O = (0, 0)$ en $E = (1, 0)$, een *homoklinische baan* met oplossingen die naar O gaan als $t \to \pm\infty$, en oneindig veel gesloten banen $\mathcal{E}(q, v) = \mathcal{E}_0$ met $-\frac{1}{12} < \mathcal{E}_0 < 0$ of $\mathcal{E}_0 > 0$ waarbij periodieke oplossingen horen.

3. Voor welke q_0 is de oplossing $q(t)$ van (1) met $q(0) = q_0$ en $\dot{q}(0) = 0$ *niet* periodiek ?

   De homoklinische baan doorsnijdt de as $v = 0$ in het punt $q_0 = \frac{4}{3}$. Deze q_0 is dus de enige waarde waarvoor de oplossing $q(t)$ van (1) met $q(0) = q_0$ en $\dot{q}(0) = 0$ niet periodiek is, omdat constante oplossingen die horen bij de rustpunten O en E periodiek zijn (met een willekeurige periode).

Opgave 3 [30pt] Het volgende stelsel van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{x}\, y' - y + zy = 0, \\ \\ z'' + \dfrac{2}{x}\, z' + y^2 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

ontstaat in de Natuurkunde bij de studie van de elektron-fonon interacties in een kristal. Het is bekend dat iedere oplossing $(y(x), z(x))$ van (3) een convergente machtreeksontwikkeling heeft in het punt $x = 0$.

Beschouw alle oplossingen met $y'(0) = z'(0) = 0$. Bereken voor kleine $|x|$ een approximatie van deze oplossingen door veeltermen van graad 4, d.w.z. vind b_k en c_k met $1 \leq k \leq 4$ in de machtreeksen

$$\begin{aligned} y(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + O(x^5), \\ z(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + O(x^5), \end{aligned}$$

als functies van b_0 en c_0.

De beginvoorwaarden $y'(0) = z'(0) = 0$ impliceren dat

$$b_1 = c_1 = 0.$$

Echter bevaten de machtreeksen van de functies $y(x)$ en $z(x)$ alleen de termen met *even* machten. Als $(y(x), z(x))$ namelijk voldoet aan het stelsel (3) voor $x > 0$ dan voldoet $(y(-x), z(-x))$ aan het stelsel voor $x < 0$. Hieruit volgt (wegens de eenduidigheid) dat de oplossing een even vector-functie van x is. Dus ook

$$b_3 = c_3 = 0.$$

De substitutie van

$$\begin{aligned} y(x) &= b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + O(x^6), \\ z(x) &= c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + O(x^6), \end{aligned}$$

in (3) geeft

$$y'' + \frac{2}{x} y' - y + zy = (6b_2 + c_0 b_0 - b_0) + (20b_4 + c_0 b_2 - b_2 + c_2 b_0)x^2 + O(x^4)$$

en

$$z'' + \frac{2}{x} z' + y^2 = (6c_2 + b_0^2) + (20c_4 + 2b_2 b_0)x^2 + O(x^4).$$

Omdat alle coëfficiënten in deze machtreeksontwikkelingen gelijk aan nul moeten zijn, krijgen we het volgende algebraïsch stelsel voor (b_2, c_2, b_4, c_4):

$$\begin{cases} 6b_2 + c_0 b_0 - b_0 &= 0, \\ 20b_4 + c_0 b_2 - b_2 + c_2 b_0 &= 0, \\ 6c_2 + b_0^2 &= 0, \\ 20c_4 + 2b_2 b_0 &= 0, \end{cases}$$

waaruit blijkt dat

$$b_2 = -\frac{1}{6} b_0 (c_0 - 1), \quad c_2 = -\frac{1}{6} b_0^2, \quad b_4 = \frac{1}{120} b_0 [b_0^2 + (c_0 - 1)^2], \quad c_4 = \frac{1}{60} b_0^2 (c_0 - 1).$$

Opgave 4 [20pt] Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0, \quad x > 0, \tag{4}$$

die equivalent is met de vergelijking van Airy.

1. Laat zien dat (4) onder de substituties

$$u = x^{-1/2} y, \quad t = \tfrac{2}{3} x^{3/2},$$

overgaat in de Bessel vergelijking

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{du}{dt} + \frac{\left(t^2 - \frac{1}{9}\right)}{t^2} u = 0, \quad t > 0. \tag{5}$$

Er geldt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{3} \frac{3}{2} x^{1/2} = x^{1/2}.$$

Met de kettingregel krijgen we voor $x > 0$

$$\begin{aligned} y(x) &= u(t) x^{1/2}, \\ y'(x) &= \frac{du(t)}{dt} x + \frac{1}{2} u(t) x^{-1/2}, \\ y''(x) &= \frac{3}{2} \frac{du(t)}{dt} + \frac{d^2 u(t)}{dt^2} x^{3/2} - \frac{1}{4} u(t) x^{-3/2}, \end{aligned}$$

waarin

$$t = \frac{2}{3} x^{3/2}.$$

Dus geeft (4)

$$y''(x) + x y(x) = x^{3/2} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{du(t)}{dt} + x^{3/2} u(t) - \frac{1}{4} x^{-3/2} u(t) = 0$$

ofwel

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{3}{2} x^{-3/2} \frac{du(t)}{dt} + u(t) - \frac{1}{4} x^{-3} u(t) = 0.$$

De laatste vergelijking is equivalent met (5) omdat

$$\frac{3}{2} x^{-3/2} = \frac{1}{t} \quad \text{en} \quad \frac{1}{4} x^{-3} = \frac{\frac{1}{9}}{t^2}.$$

2. Zij $J_{1/3}(t)$ en $J_{-1/3}(t)$ twee lineaire onafhankelijke oplossingen van (5). Schrijf de algemene oplossing van (4) met de hulp van deze Bessel functies.

De algemene oplossing van (5) is de lineaire combinatie

$$u(t) = AJ_{1/3}(t) + BJ_{-1/3}(t)$$

met $A, B \in \mathbb{R}$. Stap 1 impliceert dat

$$y(x) = x^{1/2} u\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) = Ax^{1/2} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + Bx^{1/2} J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

de algemene oplossing van (4) is.