Tentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 19 april 2016, 8:30-11:30 uur

Dit tentamen bestaat uit drie opgaven. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam, studentnummer en groepsnummer te zetten. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [50pt] Beschouw het volgende stelsel van *stuksgewijs* lineaire differentiaalvergelijkingen in het vlak:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - 2|x| + y, \\ \dot{y} &= \frac{1}{2}(-9x + |x|) + y. \end{cases} \tag{1}$$

We zullen de stabiliteit van het rustpunt $x = y = 0$ bestuderen. Merk op dat het vectorveld in het rechterlid van (1) *niet* continu differentieerbaar is als $x = 0$.

(a) [5 pts] Bewijs dat het vectorveld van (1) continu en lokaal Lipschitz-continu is in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, zodat de lokale existentie- en eenduidigheidsstelling geldt voor (1).

(b) [5 pts] Beschouw de volgende twee lineaire stelsels in het vlak,

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + y, \\ \dot{y} &= -5x + y, \end{cases} \tag{2}$$

en

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + y, \\ \dot{y} &= -4x + y, \end{cases} \tag{3}$$

die overeenkomen met (1) voor $x \geq 0$ en $x \leq 0$, respectievelijk. Beargumenteer dat hieruit volgt dat iedere oplossing van (1) gedefinieerd is voor alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) [10 pts] Bewijs dat het rustpunt $x = y = 0$ een *stabiel brandpunt* van (2) is, maar dat het een *instabiel brandpunt* van (3) is. Schets de faseplaatjes behorend bij (2) en (3).

(d) [10 pts] Bereken de stromingen $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ voor (2) en $\psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ voor (3).

(e) [10 pts] Neem een punt $(0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ met $y_0 > 0$ en vind een minimale $t_0 > 0$ zo dat

$$\varphi_{t_0} \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix},$$

met $\eta < 0$. Bereken η als functie van y_0. Vind daarna een minimale $t_1 > 0$ zo dat

$$\psi_{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

met $y_1 > 0$. Geef een expliciete formule voor y_1 als functie van η. **Z.O.Z.**

(f) [5 pts] De samenstelling van de afbeeldingen $y_0 \mapsto \eta$ en $\eta \mapsto y_1$ definieert een afbeelding $y_0 \mapsto y_1 =: f(y_0)$. Laat

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ voor iedere $y_0 > 0$.

(g) [5 pts] Zij $\xi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de stroming voor (1). Bewijs dat $\lim_{t\to\infty} \xi_t(x, y) = (0, 0)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Schets het faseplaatje behorend bij (1).

Opgave 2 [20pt] Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\ddot{q} + \sin q = 0, \tag{4}$$

die oscillaties van een ideale slinger beschrijft.

(a) [5 pts] Schets het faseplaatje van (4) in het $(q, \dot{q})$-vlak.

(b) [15 pts] Zij $q(t)$ een periodieke oplossing van (4) met $q(0) = \varepsilon$ waarin $|\varepsilon| \ll 1$ en $\dot{q}(0) = 0$. Het is bekend dat voor *eindige* t en $\varepsilon \to 0$ deze oplossing kan geschreven worden als

$$q(t) = \varepsilon q_1(t) + \varepsilon^2 q_2(t) + \varepsilon^3 q_3(t) + O(\varepsilon^4).$$

Laat zien dat

$$\ddot{q}_1 + q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + q_2 = 0, \quad \ddot{q}_3 + q_3 = \tfrac{1}{6} q_1^3,$$

met $q_1(0) = 1,\ \dot{q}_1(0) = 0,\ q_2(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ en $q_3(0) = \dot{q}_3(0) = 0$. Los deze beginwaardeproblemen op en vind expliciete formules voor $q_1(t), q_2(t)$ en $q_3(t)$.
Hint: $\cos^3(t) = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$.

(c) [**Bonus 30 pts**] Bewijs dat voor de periode $T(\varepsilon)$ van $q(t)$ geldt dat

$$T(\varepsilon) = 2\pi\left(1 + \tfrac{1}{16}\varepsilon^2\right) + O(\varepsilon^4) \quad \text{als} \quad \varepsilon \to 0.$$

Hint: T is de waarde van $t \approx 2\pi$ waarvoor $q(t)$ een maximum heeft.

Opgave 3 [30pt] Beschouw de 4de-orde differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$

$$x^4 y'''' + 6x^3 y''' + (2\pi^2 + 7)x^2 y'' + (2\pi^2 + 1)xy' + \pi^4 y = 0, \quad x > 0. \tag{5}$$

(a) [5 pts] Laat zien dat $y(x) = x^r$ voldoet aan (5) dan en slechts dan als

$$f(r) := (r^2 + \pi^2)^2 = 0.$$

(b) [10 pts] Vind *vier* lineair onafhankelijke reële oplossingen van (5).

(c) [10 pts] Bewijs dat het homogene randwaardeprobleem op $[1, e]$, dat bestaat uit (5) en $y(1) = y'(1) = y(e) = y'(e) = 0$, geen niet-triviale oplossingen heeft.

(d) [5 pts] Hoeveel oplossingen heeft het volgende inhomogene randwaardeprobleem?

$$\begin{cases} x^4 y'''' + 6x^3 y''' + (2\pi^2 + 7)x^2 y'' + (2\pi^2 + 1)xy' + \pi^4 y \;=\; e^{\sin(x^2)}, \quad x \in [1, e], \\ y(1) \;=\; y'(1) \;=\; y(e) \;=\; y'(e) \;=\; 0. \end{cases}$$