Docent: Yu.A. Kuznetsov
Assistants: F. Witteveen, T. Gomez
E. Visser, B. de Wolff,
F. Nolet

UITWERKING TENTAMEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WISB231)

13 april 2017, 13:30-16:30 uur

Opgave 1 [15pt] Zij $y : I \to \mathbb{R}$ de maximale oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y' + \frac{3}{x}y = x, \quad y(1) = 1. \tag{1}$$

Vind het interval I.

We kunnen de vergelijking (1) expliciet oplossen met de methode van variatie van constanten van Lagrange. De maximale oplossing van

$$z' = -\frac{3}{x}z, \quad z(1) = 1,$$

is

$$z(x) = \exp\left(-\int_1^x \frac{3}{\xi}d\xi\right) = \exp(-3\ln x) = \frac{1}{x^3}, \quad x > 0.$$

Schrijven we $y(x) = C(x)z(x)$, dan geldt

$$\begin{aligned} y'(x) &= C'(x)z(x) + C(x)z'(x) \;=\; C'(x)z(x) - \frac{3}{x}C(x)z(x), \\ y'(x) &= -\frac{3}{x}C(x)z(x) + x. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de differentiaalvergelijking $C'(x) = x^4$, waarvoor we een oplossing zoeken die voldoet aan $C(1) = 1$. Deze is

$$C(x) = \frac{4}{5} + \frac{x^5}{5},$$

zo dat

$$y(x) = \frac{C(x)}{x^3} \;=\; \frac{4}{5x^3} + \frac{x^2}{5}$$

met $x > 0$. Dus $I =]0, \infty[$.

Alternatief: De vergelijking (1) is een inhomogene lineaire vergelijking van de vorm

$$y' = a(x)y + b(x)$$

met

$$a(x) = -\frac{3}{x} \quad \text{en} \quad b(x) = x.$$

Het maximale interval, dat $x_0 = 1$ bevat en waarop beide functies gedefinieerd en continu zijn, is $J =]0, \infty[$. De algemene theorie van lineaire eerste orde stelsels impliceert dat $I = J =]0, \infty[$. In dit geval kan inderdaad iedere oplossing van het homogene beginwaardeprobleem $y' = a(x)y,\ y(x_0) = y_0$ met $x_0 \in J$ uitgebreid worden tot het hele interval J. De oplossingsformule voor het inhomogene beginwaardeprobleem $y' = a(x)y + b(x),\ y(x_0) = y_0$ definieert dan de oplossing op hetzelfde interval J.

Opgave 2 [25pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) [10 pts] Vind $\det(\mathrm{e}^{xA})$.

Wegens de determinantformule geldt $\det(\mathrm{e}^{xA}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Sp}(xA)}$. Voor de matrix (2), hebben we $\mathrm{Sp}(A) = 2$, dus $\det(\mathrm{e}^{xA}) = \mathrm{e}^{x\mathrm{Sp(A)}} = \mathrm{e}^{2x}$.

(b) [15 pts] Het is bekend dat voor een $n \times n$ matrix A iedere matrixcoëfficiënt van e^{xA} een lineaire combinatie is van de functies $x^{m_k}\mathrm{e}^{\lambda_j x}$ met geschikte $0 \leq m_k < n$ en $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Wat is de maximale m_k voor matrix (2) ?

De maximale m_k is gelijk aan de lengte van de langste Jordan-ketting voor matrix A min één. Om het aantal en de lengte van de Jordan-kettingen van A te vinden, bereken we eerst de eigenwaarden van A.

De karakteristieke veelterm voor A is

$$h(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2.$$

De wortels van de karakteristieke vergelijking $h(\lambda) = 0$ zijn $\lambda_1 = 0$ (enkelvoudig) en $\lambda_2 = 1$ (dubbele).

Omdat $\lambda_1 = 0$ de algebraische multipliciteit 1 heeft, bestaat de Jordan-ketting die bij deze eigenwaarde hoort uit één eigenvector en heeft dus lengte 1.

De eigenwaarde $\lambda_2 = 1$ heeft de algebraische multipliciteit 2. Neem dan de matrix

$$N = A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda_2 & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix heeft rank $r = 1$, omdat de tweede en de derde rijen de veelvouden zijn van de eerste rij. Dus is de nulruimte van N tweedimensional ($\dim\ \mathrm{Ker}\ N = n - r = 3 - 1 = 2$). Er bestaan twee lineair onafhankelijke nulvectoren van matrix N, die ook de eigenvectoren zijn van A met eigenwaarde $\lambda_2 = 1$. Er zijn dus twee Jordan-kettingen van lengte 1 behorend bij $\lambda_1 = 1$.

Dus hebben alle Jordan-kettingen van A de lengte 1, zodat de maximale m_k 0 is.

Alternatief: Er kan opgemerkt worden dat

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A\ .$$

Dus $A^k = A$ voor alle $k \geq 1$. Hieruit volg meteen dat

$$\mathrm{e}^{xA} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k = E + A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = E + A(\mathrm{e}^x - 1) = \mathrm{e}^x A + E - A.$$

Dus

$$\mathrm{e}^{xA} = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^x - 1 & -\mathrm{e}^x + 1 & -\mathrm{e}^x + 1 \\ 3\mathrm{e}^x - 3 & -2\mathrm{e}^x + 3 & -3\mathrm{e}^x + 3 \\ -\mathrm{e}^x + 1 & \mathrm{e}^x - 1 & 2\mathrm{e}^x - 1 \end{pmatrix}.$$

Er zijn geen factoren x^{m_k} met $m_k > 0$. Dus is de maximale m_k gelijk aan 0. Er geldt ook dat $\det(\mathrm{e}^{xA}) = \mathrm{e}^{2x}$.

Opgave 3 [20pt] Vind de oplossing $y = y(x)$ van de 2de-orde differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' - 6y = 0, \quad x > 0, \tag{3}$$

die voldoet aan $y(1) = 2$ en waarvoor $\lim_{x \downarrow 0} y(x)$ bestaat.

De verdelijking (3) is een vergelijking van Euler. Dus heeft (3) een oplossing $y(x) = x^r$ dan en slechts dan als r voldoet aan

$$r(r-1) - 6 = r^2 - r - 6 = 0 \ .$$

De wortels van deze kwadratische vergelijking zijn

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1 \pm 5}{2} \ ,$$

zodat $r_1 = 3$ en $r_2 = -2$. We hebben daarom twee lineair onafhankelijke oplossingen op $x > 0$, nl.

$$y_1(x) = x^3 \quad \text{en} \quad y_2(x) = \frac{1}{x^2} \ .$$

De algemene oplossing van (3) is

$$y(x) = Ax^3 + \frac{B}{x^2} \ .$$

De voorwaarde $\lim_{x \downarrow 0} y(x)$ impliceert $B = 0$. Uit $y(1) = 2$ krijgen we $A = 2$. De conclusie is $y(x) = 2x^3$.

Opgave 4 [40pt] Beschouw het beroemde *Lorenz-stelsel* met $\sigma = -1$, $r = 1$, en $b = -2$:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= x - y - xz, \\ \dot{z} &= 2z + xy. \end{cases} \tag{4}$$

(a) [5 pts] Laat zien dat de matrix van linearisatie van (4) in het rustpunt $x = y = z = 0$ een dubbele eigenwaarde $\lambda = 0$ heeft.

De linearisatie van (4) in het punt $(0, 0, 0)$ is het lineaire stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= x - y, \\ \dot{z} &= 2z. \end{cases} \tag{5}$$

met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

De eigenwaarden van A zijn de nulpunten van de karakteristieke veelterm

$$h(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 1 + 1)(2 - \lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2) \ ,$$

dus $\lambda_1 = 0$ (dubbele) en $\lambda_2 = 2$ (enkelvoudig).

(b) [5 pts] Laat zien dat de substitutie

$$\begin{cases} x &= u + v \\ y &= u \\ z &= w \end{cases}$$

het stelsel (4) transformeert in het stelsel

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot u &=& v - w(u+v),\\ \dot v &=& w(u+v),\\ \dot w &=& 2w + u(u+v).\end{array}\right. \tag{6}$$

Er geldt

$$\begin{array}{rcl}\dot u + \dot v &=& \dot x \;=\; x-y \;=\; (u+v)-u \;=\; v,\\ \dot u &=& \dot y \;=\; x-y-xz \;=\; v - w(u+v),\\ \dot w &=& \dot z \;=\; 2z+xy \;=\; 2w+u(u+v),\end{array}$$

ofwel

$$\begin{array}{rcl}\dot u + \dot v &=& v,\\ \dot u &=& v - w(u+v),\\ \dot w &=& 2w + u(u+v).\end{array}$$

Trek de tweede vergelijking van de eerste af om $\dot v = w(u+v)$ te vinden. Samen met de tweede en de derde vergelijking, geeft dat (6).

(c) [10 pts] Zij $t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$ de maximale oplossing van (6) met $u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0$. Een deelverzameling $M \subset \mathbb{R}^3$ heet *invariant* voor (6) als $(u_0, v_0, w_0) \in M$ impliceert dat $(u(t), v(t), w(t)) \in M$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ waarvoor de maximale oplossing is gedefinieerd.

Bewijs dat de *paraboloïde*

$$P := \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : w = -\frac{1}{2}(u+v)^2\right\}$$

invariant is voor (6).

Beschouw de functie $G(u,v,w) := w + \frac{1}{2}(u+v)^2$ en definieer $g(t) := G(u(t),v(t),w(t))$ langs de maximale oplossing. Dan geldt

$$\begin{array}{rcl}\dot g &=& \dfrac{\partial G}{\partial u}\dot u + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dot v + \dfrac{\partial G}{\partial w}\dot w\\ &=& (u+v)\dot u \;+\; (u+v)\dot v \;+\; \dot w\\ &=& v(u+v) - w(u+v)^2 \;+\; w(u+v)^2 + 2w + u(u+v)\\ &=& 2w + (u+v)^2\\ &=& 2g,\end{array}$$

d.w.z.

$$\dot g = 2g. \tag{7}$$

Dus $g(t) = g(0)\mathrm{e}^{2t}$. Als $(u_0, v_0, w_0) \in P$ dan is $g(0) = 0$ en vervolgens $g(t) \equiv 0$. Hieruit volgt dat $(u(t), v(t), w(t)) \in P$ voor alle t waarvoor de maximale oplossing is gedefineerd.

(d) [5 pts] Laat zien dat voor iedere oplossing $(u(t), v(t), w(t)) \in P$ geldt

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot u &=& v + \frac{1}{2}(u+v)^3,\\ \dot v &=& -\frac{1}{2}(u+v)^3.\end{array}\right. \tag{8}$$

Als $(u(t), v(t), w(t)) \in P$ dan $w(t) = -\frac{1}{2}(u(t)+v(t))^2$ en uit (6) volgt inderdaad dat

$$\begin{cases} \dot{u}(t) &= v(t) - w(t)(u(t)+v(t)) \;=\; v(t) + \frac{1}{2}(u(t)+v(t))^3, \\ \dot{v}(t) &= w(t)(u(t)+v(t)) \;=\; -\frac{1}{2}(u(t)+v(t))^3. \end{cases}$$

(e) [10 pts] Bewijs dat (8) een *Hamilton-stelsel* is en bereken de bijbehorende Hamiltonfunctie. Schets het faseplaatje van (8) in een omgeving van het rustpunt $u = v = 0$.

Het stelsel (8) heeft de Hamiltoniaanse vorm

$$\begin{cases} \dot{u} &= \dfrac{\partial H(u,v)}{\partial v}, \\ \dot{v} &= -\dfrac{\partial H(u,v)}{\partial u}, \end{cases}$$

met de Hamiltonfunctie

$$H(u,v) = \frac{v^2}{2} + \frac{(u+v)^4}{8} \; . \tag{9}$$

Deze functie is willekeurig vaak differentieerbaar en heeft een globaal minimum in het punt $u = v = 0$. De functie (9) is de constante van beweging voor (8) en de banen van (8) liggen in de niveaukrommen $H(u,v) = h$, die gesloten zijn voor $h > 0$. Het stelsel (8) heeft één rustpunt, nl. $u = v = 0$. Alle andere banen zijn dus periodiek. De bijbehorende maximale oplossingen zijn gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

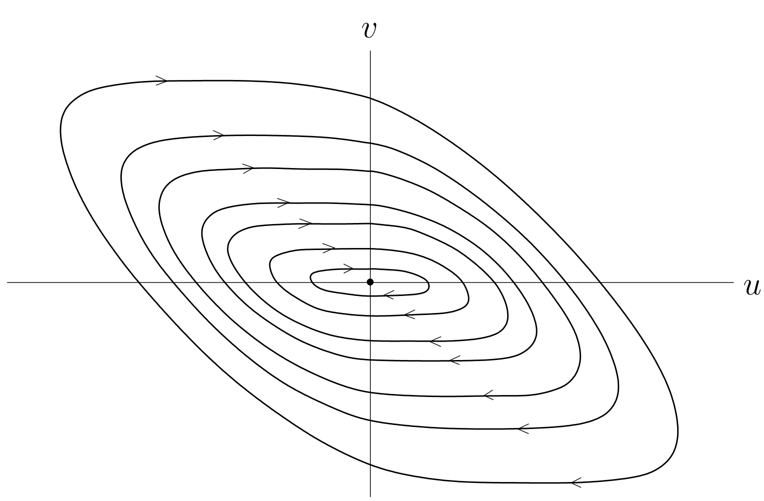
Het vectorveld van (8) langs de u-as ($v = 0$) is

$$\frac{1}{2}u^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

met de hellingscoëfficiënt -1 voor $u \neq 0$. De banen passeren de u-as van boven naar beneden voor $u > 0$ en andersom voor $u < 0$. Bovendien is het vectorveld van (8) langs de lijn $v = -u$ horizontaal, nl.

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Met deze feiten kunnen we het faseplaatje in Figuur 1 schetsen.



Figuur 1: Faseplaatje van (8) in het (u, v)-vlak.

(f) [5 pts] Welke conclusies kunnen getrokken worden over het gedrag van de oplossingen van (6) op de paraboloïde P? Wat impliceert dat voor het Lorenz-stelsel (4)?

Het punt $(0,0,0) \in P$ is een rustpunt. Alle andere banen op P zijn periodiek, zodat dit rustpunt is een (niet-lineair) centrumpunt op P. De paraboloïde P is instabiel (dat volgt uit (7)). In het Lorenz-stelsel (4) bestaat dus de globale invariante tweedimensionale deelverzameling (oppervlakte)

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = u+v,\ y = u,\ z = -\frac{1}{2}(u+v)^2,\quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

waarin alle niet-triviale banen periodiek zijn. Deze deelverzameling is instabiel.

Bonus Opgave [10pt] Vind de oplossing van het Cauchy-beginwaardeprobleem

$$u'' + u' = (u')^2, \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 1.$$

Het is evident dat $u(x) = x$ een oplossing van dit Cauchy-beginwaardeprobleem is. Wegens de Existentie- en Eenduidigheidsstelling, is deze oplossing uniek.