Logica voor AI (2012/13) — CKI en Informatica — Universiteit Utrecht

Deeltentamen 1

14 december 2012, 09:00 - 11:00, BBL 083

Per opgave zijn 10 punten te behalen. Zet naam en studentnummer op ieder vel.

Opgave 1

Bekijk het volgende model. Geef voor elk van de onderstaande formules een wereld in het model waarin de formule waar is en leg uit waarom de formule waar is in die wereld.
(2 punten per formule)

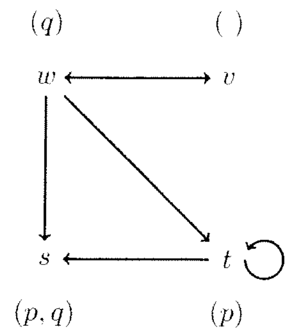
(i) $\Box\Diamond\Box p \wedge \Diamond\neg\Box p$

(ii) $(\Diamond\Box p \leftrightarrow \neg\Box\Diamond q) \rightarrow \neg\Diamond\top$

(iii) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow (\Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg q)$

(iv) $\Box\Diamond p \wedge (\neg\Diamond p \rightarrow \Box(p \wedge \Diamond\neg p))$

(v) $\Diamond(\Diamond p \wedge \Diamond q) \wedge (\Box\Box p \vee \Box\Box q)$



Opgave 2

(a) De formule $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ is geldig in het model uit opgave 1. Laat zien dat deze formule niet geldig is in de modelstructuur waarop dit model is gebaseerd.
(2 punten)

(b) De formule $\Box\bot \vee \Diamond\Diamond\Box\bot$ is geldig in de modelstructuur uit opgave 1 maar niet algemeen modaallogisch geldig. Leg uit waarom de formule geldig is in deze modelstructuur en laat zien dat de formule niet algemeen modaallogisch geldig is.
(4 punten)

(c) Wanneer is een formule $\varphi \in \mathcal{L}_m$ een geldige gevolgtrekking uit een verzameling formules $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_m$, d.w.z. wanneer geldt $\Gamma \models \varphi$? (1 punt)

(d) Bewijs de geldigheid of ongeldigheid van de volgende gevolgtrekking:
$\{\Diamond\Box\varphi \vee \Box\psi, \Diamond\varphi\} \overset{?}{\models} \Box(\varphi \vee \psi)$. (3 punten)

Opgave 3

Zij $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ een modelstructuur.
$\mathcal{F}$ heet deterministisch desda $\forall w \forall v \forall z((w\mathcal{R}v \wedge w\mathcal{R}z) \rightarrow v = z)$.
Bewijs:

$$\mathcal{F} \text{ is deterministisch} \quad \text{desda} \quad \mathcal{F} \models \Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi$$

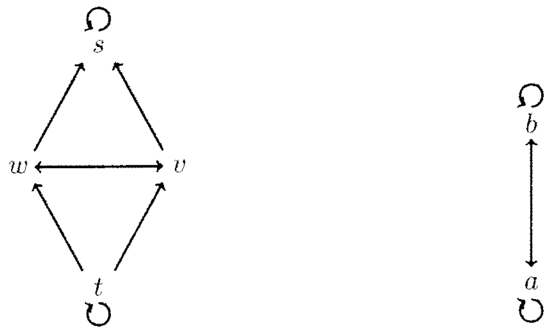
(10 punten)

Opgave 4 Bekijk de onderstaande modelstructuren $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$.

vRw en vZv'

dus $\exists_{w'}$ $v'R'w'$

$vZv' \Rightarrow V(v) = V(v')$



$\mathcal{F}$ $\mathcal{F}'$

(a) Geef een valuatie $\mathcal{V}$ op $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ en een valuatie $\mathcal{V}'$ op $\mathcal{F}' = \langle \mathcal{W}', \mathcal{R}' \rangle$ zodanig dat er een bisimulatie $\mathcal{Z}$ is tussen de resulterende modellen $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ en $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{W}', \mathcal{R}', \mathcal{V}' \rangle$ die compleet is voor zowel $\mathcal{M}$ als $\mathcal{M}'$. (2 punten)

(b) Geef de bisimulatie $\mathcal{Z}$ tussen de modellen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}'$ uit opgave 4a. (2 punten)

(c) Er is een p-morfisme tussen de modelstructuren $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$. Geef een eigenschap van de bereikbaarheidsrelatie waarvan hieruit blijkt dat de desbetreffende klasse van modelstructuren niet modaal definieerbaar is en leg uit waarom dit zo is. (Let op: Het niet-hebben van een eigenschap is ook een eigenschap.) (4 punten)

(d) Geef het w-gegenereerde subframe $\mathcal{F}_w$ van de modelstructuur $\mathcal{F}$. (2 punten)

Opgave 5

(a) Geef een bewijs in natuurlijke deductie voor $\vdash_T \Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$. Wat toont dit aan? (2 punten)

(b) Geef een bewijs in natuurlijke deductie om aan te tonen dat de verzameling formules $\{\Box\varphi, \Diamond\varphi, \neg\Diamond\Box\varphi\}$ niet 4-consistent is. (4 punten)

(c) Geef een informele afleiding in het systeem $KDB4$ voor het principe T. (3 punten)

(d) Geef (i) de correctheidsstelling en (ii) de volledigheidsstelling voor het systeem K. (1 punt)

Natuurlijke Deductie

$\wedge$-introductie

$$\begin{array}{l} \phi \\ \psi \\ \cdots \\ \phi \wedge \psi \end{array}$$

$\wedge$-eliminatie

$$\begin{array}{l} \phi \wedge \psi \\ \cdots \\ \phi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \phi \wedge \psi \\ \cdots \\ \psi \end{array}$$

$\vee$-introductie

$$\begin{array}{l} \phi \\ \cdots \\ \phi \vee \psi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \psi \\ \cdots \\ \phi \vee \psi \end{array}$$

$\vee$-eliminatie

$$\begin{array}{l} \phi \vee \psi \\ \begin{array}{|l} \phi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array} \\ \begin{array}{|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array} \\ \cdots \\ \chi \end{array}$$

$\rightarrow$-introductie

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|l} \phi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array} \\ \cdots \\ \phi \rightarrow \psi \end{array}$$

$\rightarrow$-eliminatie

$$\begin{array}{l} \phi \rightarrow \psi \\ \phi \\ \cdots \\ \psi \end{array}$$

$\leftrightarrow$-introductie

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|l} \phi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array} \\ \begin{array}{|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \phi \end{array} \\ \cdots \\ \phi \leftrightarrow \psi \end{array}$$

$\leftrightarrow$-eliminatie

$$\begin{array}{l} \phi \leftrightarrow \psi \\ \cdots \\ \phi \rightarrow \psi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \phi \leftrightarrow \psi \\ \cdots \\ \psi \rightarrow \phi \end{array}$$

$\neg$-introductie

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|l} \phi \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} \\ \cdots \\ \neg\phi \end{array}$$

$\neg$-eliminatie

$$\begin{array}{l} \phi \\ \neg\phi \\ \cdots \\ \bot \end{array}$$

Dubbel-$\neg$

$$\begin{array}{l} \neg\neg\phi \\ \cdots \\ \phi \end{array}$$

EFSQ

$$\begin{array}{l} \bot \\ \cdots \\ \phi \end{array}$$

$\Box$-introductie

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \vdots \\ \phi \end{array} \\ \cdots \\ \Box\phi \end{array}$$

$\Box$-eliminatie

$$\begin{array}{l} \Box\phi \\ \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \phi \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

$\Diamond$-introductie

$$\begin{array}{l} \Diamond\phi \\ \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \begin{array}{|l} \phi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array} \end{array} \\ \Diamond\psi \end{array}$$

Definitie $\Diamond$

$$\begin{array}{l} \Diamond\phi \\ \cdots \\ \neg\Box\neg\phi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg\Box\neg\phi \\ \cdots \\ \Diamond\phi \end{array}$$

$\Diamond\neg$

$$\begin{array}{l} \Diamond\neg\phi \\ \cdots\cdots \\ \neg\Box\phi \end{array}$$

$\neg\Diamond$

$$\begin{array}{l} \neg\Diamond\phi \\ \cdots\cdots \\ \Box\neg\phi \end{array}$$

$\Box\neg$

$$\begin{array}{l} \Box\neg\phi \\ \cdots\cdots \\ \neg\Diamond\phi \end{array}$$

$\neg\Box$

$$\begin{array}{l} \neg\Box\phi \\ \cdots\cdots \\ \Diamond\neg\phi \end{array}$$

CP

$$\begin{array}{l} \phi \rightarrow \psi \\ \cdots\cdots \\ \neg\psi \rightarrow \neg\phi \end{array}$$

D

$$\begin{array}{l} \Box\phi \\ \cdots\cdots \\ \Diamond\phi \end{array}$$

T

$$\begin{array}{l} \Box\phi \\ \cdots\cdots \\ \phi \end{array}$$

B

$$\begin{array}{l} \Diamond\Box\phi \\ \cdots\cdots \\ \phi \end{array}$$

4

$$\begin{array}{l} \Box\phi \\ \cdots\cdots \\ \Box\Box\phi \end{array}$$

5

$$\begin{array}{l} \Diamond\phi \\ \cdots\cdots \\ \Box\Diamond\phi \end{array}$$