Universiteit Utrecht
Departement Informatica

Toets Optimalisering op woensdag 19 december 2012, 10.30-12.30 uur.

- **Mobieltjes UIT** en diep weggestopt.
- Het gebruik van een **rekenmachine** is niet nodig en dus ook **niet toegestaan**.
- Het is **niet** toegestaan om er een 'spiekbrief' bij te houden.
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over drie bladzijden.
- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- **Wie zowel de tussentoets als het tentamen ter beoordeling heeft ingeleverd en op beide minder dan een 4.0 heeft gehaald kan niet meedoen aan het hertentamen. Wie bij de toets dan wel het tentamen niets inlevert mag sowieso meedoen aan het hertentamen (en inleveren van het gemaakte werk is niet verplicht).**
- De presentatie (masterclass) over AIMMS vindt plaats op MAANDAG 7 januari, 2013 (en niet op woensdag 9 januari).

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 30 punten):
Opgave 1: 3 punten.
Opgave 2: (a) 5 punten, (b) 3 punten.
Opgave 3: (a) 9 punten, (b) 4 punten.
Opgave 4: (a) 2 punten, (b) 4 punten.

Succes!

=======================================

Opgave 1.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} \quad z = & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & \\
& \text{o.v.} & 6x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 10 \\
& & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 6 \\
& & 10x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \leq & -4 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Laat x_5, x_6, x_7 de spelingsvariabelen zijn. Geef het starttableau van de eerste fase dat gebruikt kan worden om een TBO te vinden (je hoeft dus **niet** die TBO te bepalen).

Opgave 2
Beschouw het volgende probleem, dat we het BIJBAANPROBLEEM zullen noemen. Een student, laten we hem X noemen, heeft van zijn ouders te horen gekregen dat de geldkraan dichter wordt gedraaid. Dit betekent dat hij kan kiezen tussen bezuinigen of extra inkomsten vergaren. Aangezien hij vindt dat de economie niet kapot moet worden bezuinigd, en omdat hij aan het begin van de avond nog wel wat tijd over heeft, besluit X om bijlessen te geven aan scholieren.

Aan werk geen gebrek, dus binnen de kortste keren heeft onze student een goede klantenkring opgebouwd, bestaande uit n potentiële klanten (scholieren). X besluit het systematisch aan te pakken. Hij verdeelt zijn beschikbare tijd in T intervallen van elk een uur lang (een les duurt altijd één uur); per uur kan hij aan één scholier les geven. Vervolgens vraagt X aan iedere potentiële klant om aan te geven op welke van de T uren hij bijlessen kan volgen, hoeveel bijlessen hij maximaal wil ontvangen, en hoeveel hij wil betalen. Noteer de gegevens (N.B. dit zijn geen variabelen) behorend bij opdracht j met: a_{jt} die de waarde 1 heeft als scholier j kan op tijdstip t en 0 anders, q_j is het aantal uren bijles dat j maximaal wil hebben, en p_{jt} is de prijs die j wil betalen voor een uur bijles op tijdstip t. Uiteraard wil X zoveel mogelijk verdienen.

(a) Formuleer het BIJBAANPROBLEEM als een ILP-probleem. **Geef hierbij netjes aan wat de beslissingsvariabelen, beperkingen en doelstellingsfunctie voorstellen.**

(b) De scholieren hebben uiteraard commentaar op deze procedure. In dit geval luidt het (terechte) commentaar dat ze graag of de volle q_j uren bij X terecht kunnen of helemaal niet (dan zoeken ze wel een ander slachtoffer). Geef aan hoe je de formulering van (a) moet aanpassen om met deze eis rekening te kunnen houden.

Opgave 3
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} \quad z = & -9x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 & & \\
& \text{o.v.} & & & -x_2 & - & 2x_3 & \leq & b_1 \\
& & -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & b_2 \\
& & 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & \leq & b_3 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Laat x_4, x_5, x_6 de spelingsvariabelen zijn. Het volgende tableau is het laatste tableau van de tweede fase.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
0	0	-4	0	d	-2	W
0	0	-1	1	e	1	3
1	0	-1	0	f	1	1
0	1	1	0	g	1	2

(a) Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, c_BB^{-1} en de optimale oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord**. Bepaal $b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, d, e, f, g, W$ en B. **Je hoeft de waarden niet per se in deze volgorde te bepalen; het is verstandig om goed naar de volgorde te kijken.** Ga daarbij uit van de gegeven instantie; houd er rekening mee dat de tweede beperking een $\geq$ teken bevat. Schrijf je antwoorden op het antwoordenblad. Wanneer je niet aan de benodigde gegevens kunt komen, dan kun je punten verdienen door de formule te geven die je zou kunnen gebruiken indien je de benodigde gegevens wel zou hebben.

(b) Voeg een nieuwe variable x_0 toe aan het probleem; vergeet variabele x_4. Deze variabele x_0 heeft c_0 en a_0 zodanig dat in het tableau onder x_0 komt te staan $(1, 1, -1, 1)$ (zie extra blad). Voer 1 (en niet meer) iteratie uit waarbij de oplossing wordt verbeterd. Geef na afloop aan wat de gevonden oplossing is (punt en waarde). Geef ook aan of deze oplossing optimaal is. **Motiveer uw antwoord**. Gebruik $d = -3$, $e = 1$, $f = 0$, $g = 1$, $W = 0$ indien u deze waarden niet bij (a) hebt kunnen vinden (deze getallen zijn waarschijnlijk niet correct).

Opgave 4
(a) Geef aan hoe je in een tableau een onbegrensd minimum kunt herkennen.

(b) Ga uit van een niet-leeg toegelaten gebied van de vorm $X = \{x \in I\!R^n | Ax = b, x \geq 0\}$. Stel dat u $z = cx$ wilt minimaliseren. Bewijs de volgende stelling: Gegeven dat er een vector $d \in I\!R^n$ bestaat waarvoor geldt $cd < 0$, $Ad = 0$ en $d \geq 0$, toon aan dat het probleem om $z = cx$ te minimaliseren onder de voorwaarde dat $x \in X$ een onbegrensd minimum heeft.