Universiteit Utrecht
Faculteit Wiskunde en Informatica

Examen Optimalisering op woensdag 13 maart 2013, 9.00-12.00 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het is toegestaan om een 'spiekbrief' bij het tentamen te houden in de vorm van een eenzijdig beschreven/bedrukt A4'tje zonder uitklapvellen e.d.
- **Mobieltjes UIT** en diep weggestopt.
- Het gebruik van een **rekenmachine** is **niet toegestaan**.
- Het is **niet** de bedoeling dat u meer dan één iteratie uitvoert. U moet wel steeds het **volledige, nieuwe tableau bepalen**. Geef steeds de bijbehorende oplossing en vermeld of deze toegelaten en optimaal is. Wanneer er sprake is van een onbegrens minimum, dan moet u aangeven waarom.
- U kunt de onderdelen 1a, 2a, 2b, 2f en 2g beantwoorden op het antwoordvel.
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over vier bladzijden.

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 50 punten):
Opgave 1: (a) 4 punten.
Opgave 2: (a) 9 punten, (b) 3 punten, (c) 2 punten, (d) 3 punten, (e) 3 punten, (f) 3 punten, (g) 3 punten, (h) 3 punten.
Opgave 3: (a) 3 punten, (b) 3 punten.
Opgave 4: (a) 4 punten, (b) 2 punten, (c) 5 punten.

Succes!

Opgave 1.
Het oplossen van een instantie van een lineair programmeringsprobleem met begrensde variabelen heeft tot het onderstaande tableau geleid.

	l		u	l	l		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\widehat{\text{RHS}}$
0	−1	0	−1	0	−1	0	6
0	−1	1	1	−2	1	0	4
0	2	0	−1	1	−1	1	8
1	1	0	−1	0	−2	0	6

(a) Voer maximaal één iteratie uit om tot een lagere waarde van z te komen. Hierbij gelden de volgende grenzen op de variabelen:

$$0 \leq x_1 \leq 10 \quad 2 \leq x_2 \leq 8 \quad 0 \leq x_3 \leq 8 \quad 2 \leq x_4 \leq 5;$$

x_5, x_6, x_7 zijn spelingsvariabelen. Geef na afloop aan wat de bijbehorende oplossing is (punt en waarde)en of deze optimaal is of. Vermeld ook het bijbehorende tableau.

Opgave 2.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} \quad z = & x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 & + & c_4x_4 & & \\
 & \text{o.v.} & x_1 & & & + & a_{13}x_3 & - & x_4 & \leq & b_1 \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & a_{23}x_3 & + & 2x_4 & \leq & b_2 \\
 & & 4x_1 & - & x_2 & + & a_{33}x_3 & - & x_4 & \leq & b_3 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

(a) Voer spelingsvariabelen x_5, x_6 en x_7 in. Na een aantal iteraties is het volgende tableau ontstaan.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
a	−1	0	0	−3	0	−2	z_0
b	−1	0	1	−2	0	1	2
c	1	0	0	1	1	1	12
d	−1	1	0	−1	0	1	5

Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, c_BB^{-1} en de huidige oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord**. Bepaal B en de correcte waarden voor c_2, c_3, c_4, a_{13}, $a_{23}, a_{33}, b_1, b_2, b_3, a, b, c, d, z_0$. **Ga daarbij uit van de instantie die aan het begin van deze opgave is gegeven met daaraan toegevoegd de spelingsvariabelen. Schrijf de uitkomsten op het antwoordvel.**
N.B.. Indien u B, c_BB^{-1} of B^{-1} niet hebt kunnen vinden, dan kunt u voor de overige onderdelen van vraag (a) toch nog punten scoren door aan te geven hoe u de overige waarden had kunnen vinden als u wel over deze informatie had beschikt.

(b) **Vergeet vanaf heden** x_1. Voeg een nieuwe variabele x_0 toe aan het tableau. De kolom a_0 en kostencoëfficiënt c_0 zijn zodanig dat in het tableau onder x_0 de vector $(1, -1, 1, 1)$ komt te staan (zie antwoordvel). Voer één iteratie uit. Geef na afloop aan welke oplossing nu gevonden is (punt en waarde) en geef aan of deze optimaal is. **Geef steeds aan waarop de door gemaakte keuzen zijn gebaseerd**. U mag voor z_0 de waarde 0 invullen, indien u de echte waarde niet hebt kunnen vinden (dit is waarschijnlijk niet de echte waarde). **Gebruik het voorbedrukte vel**.

(c) Vergeet de variabelen x_0 en x_1. U krijgt te horen dat er een nieuwe activiteit ontwikkeld is. Gebruik x_0 om aan te geven hoe vaak u deze activiteit uit denkt te gaan voeren. De bijbehorende kolom is $a_0 = (-1, 1, 1)$. Bepaal wat de kleinste waarde van c_0 is zodanig dat deze activiteit **niet** gebruikt gaat worden in de optimale oplossing.

(d) Vergeet de variabelen x_0 en x_1. Het bedrijf wil de kostencoëfficiënt c_3 veranderen in $c'_3 = c_3 + \Delta$ (waarbij Δ zowel negatief als positief kan zijn). Voor welke waarden van δ blijft de huidige oplossing optimaal?

(e) Vergeet de variabelen x_0 en x_1. Het bedrijf krijgt een interessant aanbod om een deel van de derde grondstof te verkopen (dus om b_3 te verlagen). Het bedrijf wil dit wel doen, maar het wil geen andere activiteiten gaan ontplooien (oftewel, de basis mag niet veranderen). Ga na hoeveel b_3 maximaal verlaagd mag worden. Bepaal ook hoeveel de doelstellingsfunctiewaarde zal veranderen door die verlaging van b_3.

(f) Vergeet weer de variabelen x_0 en x_1. Het bedrijf is gezwicht voor het aanbod van (e) en heeft besloten om 3 eenheden van de derde grondstof te verkopen. Het moet nu wel van productieschema veranderen. Ga na hoeveel de waarde van de doelstellingsfunctie gaat veranderen dank zij de verlaging van b_3 met 3. Los dit nieuwe probleem op **uitgaande van het tableau gegeven bij (a)**. Geef na afloop aan welke oplossing nu gevonden is (punt en waarde). **Geef steeds aan waarop de door gemaakte keuzen zijn gebaseerd. Gebruik het voorbedrukte vel**.

(g) Stel dat we de derde beperking uit het oorspronkelijke probleem weg willen laten. Los dit nieuwe probleem op **uitgaande van het tableau gegeven bij (a)**. U mag weer x_0 en x_1 buiten beschouwing laten en, indien nodig, voor z_0 de waarde 0 invullen. Geef na afloop aan welke oplossing nu gevonden is (punt en waarde). **Geef steeds aan waarop de door gemaakte keuzen zijn gebaseerd. Gebruik het voorbedrukte vel**.

(h) In het verleden is ooit een afspraak gemaakt met de overheid dat er moet gelden dat $-x_2 + x_3 - x_4 = 4$. Daar hebt u zich nooit druk om gemaakt, maar met het oog op de boetes wordt het tijd om er voor te gaan zorgen dat de gevonden oplossing hieraan gaat voldoen. Laat zien dat er geen toegelaten oplossing meer te vinden is wanneer deze vergelijking wordt toegevoegd.

Hint: Probeer met behulp van de vergelijkingen uit het tableau een vergelijking te construeren waar je simpel van kunt zien dat daaraan niet voldaan kan worden.

Opgave 3.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} \quad z = & -2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\
& \text{o.v.} & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 16 \\
& & -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 2 \\
& & & & -x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) Bepaal het duale probleem van het bovenstaande probleem (P) (**dus zonder spelingsvariabelen**).

(b) Voer spelingsvariabelen in waar nodig. Geef het starttableau voor de eerste fase; u mag hierbij zoveel kunstmatige variabelen gebruiken als u wenselijk vindt.

Opgave 4
Het BIN PACKING probleem is als volgt gedefinieerd. Er zijn n voorwerpen, die moeten worden opgeslagen. Hiervoor zijn M bins beschikbaar met omvang B; het aantal dat je gebruikt moet worden geminimaliseerd. Voorwerp i heeft omvang a_i met $0 < a_i \leq B$. Ieder voorwerp vormt één geheel en moet dus in zijn geheel worden opgeslagen.

(a) Formuleer het BIN PACKING probleem als een ILP-probleem met een **polynomiaal** aantal variabelen (de formulering hieronder voldoet hier niet aan).

Een alternatieve ILP-formulering kan worden gevonden door te werken met **vullingen**. Hierbij komt iedere vulling overeen met een verzameling voorwerpen die gezamenlijk in één bin worden opgeslagen (zonder dat er verder nog iets bij komt). Gebruik S om de verzameling mogelijke vullingen weer te geven. Vulling s wordt gekarakteriseerd door de **parameters** $(g_{1s}, \ldots, g_{ns})$, waarbij geldt $g_{js} = 1$ als voorwerp j tot vulling s behoort en $g_{js} = 0$ anders. Een mogelijke ILP-formulering wordt dan

$$\min \sum_{s \in S} x_s \qquad \text{onder de voorwaarden}$$

$$\sum_{s \in S} g_{js} x_s \geq 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$x_s \in \{0, 1\} \qquad \forall s \in S$$

(b) Beschouw de LP-relaxatie van de bovenstaande formulering, die wordt verkregen door $x_s \in \{0,1\}$ te vervangen door $0 \leq x_s \leq 1 \ \forall s \in S$. Bewijs dat het voor het optimum niet uitmaakt wanneer we de beperking $x_s \leq 1$ weglaten.

(c) Uiteraard is het niet realistisch (en zeker niet efficiënt) om alle mogelijke vullingen van te voren te enumereren. Toch willen we de LP-relaxatie die is verkregen door in de ILP-formulering de beperking $x_s \in \{0,1\}$ te vervangen door $x_s \geq 0 \ \forall s \in S$ oplossen. Dit kan geschieden zonder expliciet alle mogelijke vullingen te enumereren met behulp van de techniek van Kolomgeneratie.

Geef aan hoe deze techniek werkt. Geef hierbij aan wat de gereduceerde kosten $(z_j - c_j)$ van een vulling zijn (en wat ze voorstellen), wat het pricing probleem is, hoe het pricing probleem er in dit geval uit ziet, en waarom het nuttig is om het pricing probleem op te lossen. U hoeft niet aan te geven hoe het pricing probleem opgelost kan worden (mag wel).