Universiteit Utrecht
Faculteit Wiskunde en Informatica

Examen Optimalisering op donderdag 29 januari 2014, 13.30-16.30 uur.

- **HERKANSINGSREGEL**: Je MAG NIET aan het hertentamen meedoen indien je ZOWEL het tentamen als de toets hebt INGELEVERD en OP BEIDE minder dan een vier hebt gehaald.
- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het gebruik van een **rekenmachine is niet toegestaan** (en het is ook niet nodig).
- Het is toegestaan om een legale spiekbrief in de vorm van een eenzijdig beschreven/bedrukt A4'tje zonder uitklapvellen e.d. bij het tentamen te houden.
- Indien u met de simplexmethode breuken met een noemer groter dan 4 vindt, dan hebt u een rekenfout gemaakt.
- **Voer bij ieder onderdeel maximaal 1 iteratie uit, tenzij anders aangegeven. Ga steeds uit van het tableau vermeld aan het begin van de opgave. Vermeld na afloop van een iteratie het gevonden punt en zeg of dit punt optimaal is. Indien het minimum onbegrensd is, vermeld dan ook een richting. Indien er geen toegelaten oplossing is, geef dan aan waarom.**
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over vier bladzijden.
- Voor de vragen 1a, 1b, 1c, 1d en 3a zijn er antwoordvellen beschikbaar. U bent niet verplicht die te gebruiken. U bent ook niet verplicht om alle vakjes en regels van de tableaus op de antwoordvellen te gebruiken.
- Vergeet niet de evaluatie in te vullen.

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 57 punten):
Opgave 1: (a) 4 punten, (b) 4 punten, (c) 5 punten, (d) 4 punten (e1) 3 punten, (e2) 3 punten, (f) 4 punten.
Opgave 2: (a) 2 punten, (b) 3 punten, (c) 4 punten, (d) 4 punten.
Opgave 3: (a) 4 punten, (b) 4 punten.
Opgave 4: (a) 5 punten, (b) 4 punten.

Succes!

===

Opgave 1.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\
 & \text{o.v.} & & & x_1 & + & a_{12}x_2 & - & 5x_3 \leq 3 \\
 & & & & -x_1 & + & a_{22}x_2 & + & 3x_3 \leq 1 \\
 & & & & 2x_1 & + & a_{32}x_2 & - & 5x_3 \leq 1 \\
 & & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Laat x_4, x_5, x_6 de spelingsvariabelen zijn. Het volgende tableau is het laatste tableau van de tweede fase.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
0	0	-1	0	-3	-2	-5
1	0	-2	0	1	1	2
0	0	-3	1	-1	-1	1
0	1	1	0	2	1	3

(a) Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, $c_B B^{-1}$ en de optimale oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord**. Bepaal $a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T$. **Ga daarbij uit van de instantie die aan het begin van deze opgave is gegeven met daaraan toegevoegd de spelingsvariabelen.**

(b) Stel dat de beperking $x_1 + x_3 \leq 1$ wordt toegevoegd aan het probleem. Geef aan hoe je het resterende probleem op kunt lossen **uitgaande van het gegeven eindtableau**. Voer één iteratie uit (waarbij je pivoteert). Geef na afloop je conclusie.

(c) Stel dat uit het oorspronkelijke probleem de **tweede** beperking (dus $-x_1 + a_{22}x_2 + 3x_3 \leq 1$) wordt weggelaten. Geef aan hoe je dat nieuwe probleem op kunt lossen **uitgaande van het gegeven eindtableau. Voer twee iteraties uit** (waarbij je pivoteert). Geef na afloop je conclusie.

(d) Stel dat de huidige gegevens van activiteit 2 niet kloppen; c_2 en a_2 moeten worden vervangen door c_2' en a_2' die zodanig zijn dat wanneer je deze toevoegt in het tableau er -2 op de nulde rij komt te staan en $(1, 1, 1)^T$ daaronder (is reeds toegevoegd op het antwoordvel). Geef aan hoe je dat nieuwe probleem op kunt lossen **uitgaande van het gegeven eindtableau**. Voer één iteratie uit (waarbij je pivoteert). Geef na afloop je conclusie.

(e) Stel dat je een aanbod krijgt om een hoeveelheid ϵ (mag fractioneel zijn) van de tweede grondstof te verkopen; hierdoor verandert de tweede beperking in $-x_1 + a_{22}x_2 + 3x_3 \leq 1 - \epsilon$.

(e1) Bepaal Δ als de maximale hoeveelheid die je mag verkopen indien je wilt dat de huidige serie basisvariabelen tot een toegelaten, optimale oplossing leiden.

(e2) Bewijs dat wanneer je meer dan Δ eenheden verkoopt er geen toegelaten oplossing meer mogelijk is.

(f) Geef de optimale oplossing (punt **inclusief de spelingsvariabelen**) van het duale probleem (D) dat je krijgt door (P) te dualiseren. Het is niet de bedoeling dat je (D) gaat bepalen.

Opgave 2.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} \quad z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
& \text{o.v.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 5 \\
& & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\
& & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 12 \\
& & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & x_2 & & & \leq & 0 \\
& & & & & & x_3 & & \text{vrij}
\end{array}
$$

(a) Formuleer het duale probleem (D) van het bovenstaande lineair programmeringsprobleem (P) (dus zonder spelingsvariabelen).

(b) Bewijs dat de zwakke dualiteitsstelling geldt; deze zegt dat, indien (P) een minimaliseringsprobleem is, dan is de uitkomstwaarde van (P) altijd groter dan of gelijk aan de uitkomstwaarde van (D).

(c) Bewijs de volgende stelling: **Als (P) een onbegrensd minimum heeft, dan is het toegelaten gebied van (D) leeg.** U mag hierbij gebruik maken van (b), ook als het bewijs niet gelukt is.

(d) Bewijs het lemma van Farkas:
Precies één van de volgende beide systemen heeft een oplossing:

$$Ax \geq 0,\ cx < 0,\ x \text{ vrij} \qquad \text{en} \qquad wA = c,\ w \geq 0.$$

U mag hierbij gebruik maken van de sterke dualiteitsstelling, die zegt dat, indien (P) of (D) een begrensde optimale oplossing heeft, dan heeft het andere probleem dat ook, en de doelstellingsfunctiewaarden van de beide oplossingen zijn aan elkaar gelijk. Verder mag u natuurlijk gebruik maken van de resultaten van (c).

Opgave 3
Beschouw een lineair programmeringsprobleem dat zal worden opgelost met de simplex methode voor begrensde variabelen. Na een aantal iteraties is het volgende tableau gevonden:

x_1	x_2	x_3 (l)	x_4 (u)	x_5	x_6 (l)	x_7 (l)	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$
0	0	1	−1	0	−8	−3	0	59
1	0	−2	1	0	4	1	0	5
0	0	1	−1	1	5	−6	0	4
0	1	−1	−1	0	11	3	0	5
0	0	1	1	0	2	1	1	3

Hierbij zijn x_5, x_6, x_7, x_8 de spelingsvariabelen (en dus ≥ 0). Voor de overige variabelen gelden de volgende grenzen: $3 \leq x_1 \leq 9$; $0 \leq x_2 \leq 6$; $2 \leq x_3 \leq 6$; $1 \leq x_4 \leq 4$.

(a) De waarde van de doelstellingsfunctie kan worden verlaagd door x_4 te verlagen. Voer de bijbehorende iteratie uit. Geef na afloop je conclusie.

(b) Stel dat de kostencoëfficiënt c_1 wordt verhoogd met $\lambda \geq 0$. Bepaal voor welke waarden van λ het bovenstaande tableau correspondeert met een optimale oplossing.

Opgave 4.
Beschouw het volgende roosterprobleem dat speelt op een willekeurige school. Er zijn in totaal n docenten d_i ($i = 1, \ldots, n$) die per week de lessen moeten verzorgen die de m klassen k_j ($j = 1, \ldots, m$) moeten volgen. Voor iedere docent/klas combinatie is het aantal lessen r_{ij} bekend dat docent d_i aan klas m_j moet geven. Per week zijn in totaal p uren u_k ($k = 1, \ldots, p$) beschikbaar. Van iedere docent is de beschikbaarheid bekend; dit is weergegeven met een parameter b_{ik}, die 1 is als docent d_i beschikbaar is in uur u_k en 0 anders; uiteraard kan een docent aan maximaal één klas tegelijkertijd les geven. Iedere klas is altijd beschikbaar; uiteraard kan een klas van maximaal één docent tegelijkertijd les krijgen. In ieder uur kunnen maximaal L lessen tegelijk gegeven worden, aangezien er maar L lokalen beschikbaar zijn. Tot slot is voor iedere docent/klas/uur combinatie de waardering c_{ijk} bekend dat docent d_i les geeft aan klas k_j in uur u_k. Het doel is om een toegelaten oplossing te vinden van maximale waardering.

(a) Formuleer het bovenstaande probleem als een ILP-probleem met een **polynomiaal** aantal variabelen (de bij (b) genoemde formulering mag u dus niet gebruiken).

Een andere mogelijkheid om het probleem te formuleren is met behulp van een ILP-formulering gebaseerd op **uurroosters**; een uurrooster s geeft voor een gegeven uur u_k aan welke lessen (met een gegeven docent/klascombinatie) worden gegeven. Uurrooster s wordt gekarakteriseerd door de volgende parameters:

$$q_{ks} = \begin{cases} 1 & \text{als uurrooster } s \text{ betrekking heeft op uur } k \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$a_{ijs} = \begin{cases} 1 & \text{als docent } d_i \text{ les geeft aan klas } k_j \text{ in uurrooster } s \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Definieer S als de verzameling die alle **toegelaten** uurroosters bevat; we gaan ervanuit dat alle toegelaten uurroosters bekend zijn.

(b) Geef aan hoe het roosterprobleem als een ILP kan worden geformuleerd met behulp van de uurroosters.

Naam:
Studentnummer:

Opgave 1a.

$B^{-1} =$ $\qquad\qquad\qquad$ $a_2 =$

$c_B B^{-1} =$

Oplossing (punt en waarde):

Opgave 1b.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	0	-1	0	-3	-2	-5
	1	0	-2	0	1	1	2
	0	0	-3	1	-1	-1	1
	0	1	1	0	2	1	3

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS

Conclusie? (wel/niet toegelaten; wel/niet optimaal; wel/niet onbegrensd; punt en waarde). Verklaar uw antwoorden en keuzes.

Opgave 1c.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	0	-1	0	-3	-2	-5
	1	0	-2	0	1	1	2
	0	0	-3	1	-1	-1	1
	0	1	1	0	2	1	3

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS

Conclusie? (wel/niet toegelaten; wel/niet optimaal; wel/niet onbegrensd; punt en waarde).
Verklaar uw antwoorden en keuzes.

Naam:
Studentnummer:

Opgave 1d.

x_2'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-2	0	0	-1	0	-3	-2	-5
1	1	0	-2	0	1	1	2
1	0	0	-3	1	-1	-1	1
1	0	1	1	0	2	1	3

x_2'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS

Conclusie? (wel/niet toegelaten; wel/niet optimaal; wel/niet onbegrensd; punt en waarde). Verklaar uw antwoorden en keuzes.

Opgave 3a.

		l	u		l	l		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$
0	0	1	−1	0	−8	−3	0	59
1	0	−2	1	0	4	1	0	5
0	0	1	−1	1	5	−6	0	4
0	1	−1	−1	0	11	3	0	5
0	0	1	1	0	2	1	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$

Conclusie? (wel/niet toegelaten; wel/niet optimaal; punt en waarde). Verklaar uw antwoorden en keuzes.