Universiteit Utrecht
Bètafaculteit; Departement Informatica

Tussentoets Optimalisering op dinsdag 15 december 2015, 11.00-13.00 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Dit is een gesloten boek tentamen; het is ook niet toegestaan om er een spiekbrief bij te hebben.
- **Mobieltjes UIT** en diep weggestopt.
- Het gebruik van een **rekenmachine** is **niet toegestaan**.
- Het is **niet** de bedoeling dat u meer dan één iteratie uitvoert. U moet wel steeds het **volledige, nieuwe tableau bepalen**.
- **HERKANSINGSREGEL**: Je MAG NIET aan het hertentamen meedoen indien je ZOWEL het tentamen als de toets hebt INGELEVERD en OP BEIDE minder dan een vier hebt gehaald.
- Er is een antwoordvel bijgevoegd, waarop u de antwoorden van vragen 1a, 1b en 1c in kunt vullen.
- Het examen omvat drie opgaven, verdeeld over drie bladzijden (inclusief voorkant).

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 40 punten):
Opgave 1: (a) 4 punten, (b) 6 punten, (c) 4 punten, (d) 4 punten, (e) 4 punten.
Opgave 2: (a) 3 punten, (b) 3 punten, (c) 3 punten, (d) 4 punten.
Opgave 3: 5 punten.

Succes!

==

Opgave 1.

Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{Minimaliseer} & z & = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & 8x_3 & & - x_4 \\
\text{o.v.} & & & -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & b_1 \\
 & & & -4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & {}^{+x_5}\leq & b_2 \\
 & & & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & {}^{+x_6}\leq & b_3 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Voer spelingsvariabelen x_4, x_5 en x_6 in. Na een aantal iteraties is het volgende tableau ontstaan.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	e	0	-2	W
x_3	-1	0	1	f	0	1	2
x_5	1	0	0	g	1	1	3
x_7	1	1	0	h	0	1	5

(a) Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, c_BB^{-1} en de huidige oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord.** U hoeft de correcte waarden voor de letters niet uit te rekenen (dat komt bij (b)). Schrijf de uitkomsten op het antwoordvel.

(b) Bepaal B en de correcte waarden voor $c_1, c_2, b_1, b_2, b_3, e, f, g, h, W$. **Ga daarbij uit van de instantie die aan het begin van deze opgave is gegeven met daaraan toegevoegd de spelingsvariabelen.** Schrijf de uitkomsten op het antwoordvel.
N.B.. Indien u B of B^{-1} niet hebt kunnen vinden, dan kunt u voor de resterende onderdelen van vraag (b) toch nog punten scoren door aan te geven hoe u de overige waarden had kunnen vinden als u wel over deze informatie had beschikt.

(c) Het bovenstaande tableau correspondeert nog niet met een optimale oplossing. Voer precies één iteratie uit om tot een betere oplossing te komen. Geef na afloop aan of de resulterende oplossing optimaal is, wat de bijbehorende oplossing is, en verklaar de beslissingen die u hebt genomen bij de iteratie. Indien u de waarden voor e, f, g, h en W niet hebt kunnen vinden, dan mag u $e = -3, f = 1, g = 2, h = 0, W = 0$ invullen (dit zijn waarschijnlijk niet de echte waarden). **Gebruik het voorbedrukte vel.**

(d) Stel dat er nog een extra variabele x_0 wordt toegevoegd met bijbehorende kostencoëfficiënt c_0 en kolomvector $\mathbf{a_0}$. Wanneer deze wordt toegevoegd, dan blijkt er sprake te zijn van een onbeperkt minimum. Ga na aan welke voorwaarden c_0 en $\mathbf{a_0}$ moeten voldoen; dit mag in algemene termen (u hoeft de gegevens gevonden bij (a) en/of (b) niet in te vullen). Geef ook aan wat de bijbehorende richting $\mathbf{d}$ is.

(e) Gegeven dat $b_1 < 0$, $b_2 < 0$ en $b_3 > 0$, bepaal het starttableau van de eerste fase. U mag hierbij zoveel kunstmatige variabelen invoeren als u nodig denkt te hebben.

Opgave 2
Beschouw het volgende leveringsprobleem. Een bedrijf beschikt over één fabriek die een bepaald product produceert dat bestemd is voor de verkoop aan vaste klanten. De levering hiervan verloopt in twee stappen. Het gaat eerst van de fabriek naar een distributiecentrum en vervolgens van het distributiecentrum naar de klant. Het bedrijf beschikt over m distributiecentra, en transport van de fabriek naar distributiecentrum i ($i = 1, \ldots, m$) kost f_i per eenheid. Distributiecentrum i kan maximaal p_i eenheden verwerken. Verder zijn er n klanten; van iedere klant is bekend hoeveel deze wil ontvangen (deze hoeveelheid is gedefinieerd als d_j ($j = 1, \ldots, n$)). De leveringskosten van distributiecentrum i aan klant j bedragen c_{ij} per eenheid. U mag aannemen dat de productie en de *totale* capaciteit van de distributiecentra voldoende is om aan de vraag te voldoen. Verder is het geen probleem als een klant door verschillende distributiecentra wordt beleverd. Uiteraard is het de bedoeling dat de totale leveringskosten (dus transportkosten naar de distributiecentra en de kosten om de klanten te beleveren) worden geminimaliseerd.

(a) Formuleer het probleem van het minimaliseren van de totale leveringskosten onder de bovenstaande voorwaarden als een LP-probleem. **Geef hierbij netjes aan wat de beslissingsvariabelen, beperkingen en doelstellingsfunctie voorstellen.**

(b) De winkels vinden het vervelend wanneer ze met verschillende distributiecentra te maken hebben, en eisen daarom dat ze voortaan beleverd gaan worden door precies één distributiecentrum. Formuleer deze variant van het leveringsprobleem als een geheeltallig LP-probleem. **Geef hierbij netjes aan wat de beslissingsvariabelen, beperkingen en doelstellingsfunctie voorstellen.**

(c) De winkels claimen dat de prijs met minstens 5% omlaag moet, omdat de totale leveringskosten van de variant van (b) lager zullen zijn dan die van (a). Geef hier uw mening over.

(d) Om in de kosten te snijden wil het bedrijf een aantal distributiecentra sluiten. Gegeven is dat het gebruik van distributiecentrum i kosten q_i met zich meebrengt; die kunt u volledig besparen door het distributiecentrum te sluiten (u hoeft geen rekening te houden met kosten van een sociaal plan, en dergelijke). Formuleer nu het probleem van het minimaliseren van de totale leverkosten inclusief de kosten van het gebruik van de distributiecentra als een geheeltallig LP-probleem; u mag weer aannemen dat een klant door verschillende distributiecentra kan worden beleverd. **Geef hierbij weer netjes aan wat de beslissingsvariabelen, beperkingen en doelstellingsfunctie voorstellen.**

Opgave 3
Beschouw het volgende **maximaliseringsprobleem**:

$$\max \; \mathbf{cx} \quad \text{o.d.v.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \; \mathbf{x} \geq 0$$

We lossen dit probleem op met de simplex methode met behulp van een tableau. Geef aan hoe je in dit tableau kunt checken of de TBO die bij het tableau hoort optimaal is. **Geef een bewijs hiervan.**