Universiteit Utrecht
Faculteit Wiskunde en Informatica

Examen Optimalisering op donderdag 28 januari 2016, 13.30-16.30 uur.

- **HERKANSINGSREGEL**: Je MAG NIET aan het hertentamen meedoen indien je ZOWEL het tentamen als de toets hebt INGELEVERD en OP BEIDE minder dan een vier hebt gehaald.
- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het gebruik van een **rekenmachine is niet toegestaan** (en het is ook niet nodig).
- Het is toegestaan om een legale spiekbrief in de vorm van een eenzijdig beschreven/bedrukt A4'tje zonder uitklapvellen e.d. bij het tentamen te houden.
- Indien u met de simplexmethode breuken met een noemer groter dan 4 vindt, dan hebt u een rekenfout gemaakt.
- **Ga steeds uit van het tableau vermeld aan het begin van de opgave. Vermeld na afloop van een iteratie het gevonden punt en zeg of dit punt optimaal is. Indien het minimum onbegrensd is, vermeld dan ook een richting. Indien er geen toegelaten oplossing is, geef dan aan waarom.**
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over vier bladzijden.
- Voor de vragen 1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 1f en 3a zijn er antwoordvellen beschikbaar. U bent niet verplicht die te gebruiken. U bent ook niet verplicht om alle vakjes en regels van de tableaus op de antwoordvellen te gebruiken; hopelijk zult u niet alle tableaus nodig hebbben.
- Vergeet niet de evaluatie in te vullen.

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 61 punten):
Opgave 1: (a) 4 punten, (b) 3 punten, (c) 4 punten, (d) 6 punten, (e) 4 punten, (f) 4 punten, (g1) 3 punten, (g2) 2 punten.
Opgave 2: (a) 2 punten, (b) 3 punten, (c) 4 punten.
Opgave 3: (a) 4 punten, (b) 4 punten, (3) punten.
Opgave 4: (a) 5 punten, (b) 2 punten, (c) 4 punten.

Succes!

==

Opgave 1.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcr}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & -3x_1 & + & c_2x_2 & + & 2x_3 & & \\
& \text{o.v.} & & & x_1 & + & a_{1,2}x_2 & - & x_3 & \leq & -1 \\
& & & & -x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & x_3 & \leq & 7 \\
& & & & x_1 & + & a_{3,2}x_2 & & & \leq & -4 \\
& & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Laat x_4, x_5, x_6 de spelingsvariabelen zijn. Het volgende tableau is het laatste tableau van de tweede fase.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
0	0	0	−2	0	−1	6
1	0	−2	2	0	−1	2
0	0	1	0	1	1	3
0	1	−1	1	0	−1	3

(a) Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1} en c_BB^{-1}. Bepaal $a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T$ en c_2. **Ga daarbij uit van de instantie die aan het begin van deze opgave is gegeven met daaraan toegevoegd de spelingsvariabelen.**

(b) Geef de optimale oplossing (punt en waarde). Is dit optimum uniek?

(c) Stel dat de beperking $2x_1 - 3x_2 \leq -6$ wordt toegevoegd aan het probleem. Geef aan hoe je het resterende probleem op kunt lossen **uitgaande van het gegeven eindtableau.** Voer één iteratie uit (waarbij je pivoteert). Geef na afloop je conclusie.

(d) Stel dat uit het oorspronkelijke probleem de **derde** beperking (dus $x_1 + a_{3,2}x_2 \leq -4$) wordt weggelaten. Toon aan dat er sprake is van een onbegrensd minimum. Geef ook de bijbehorende richting; wannneer er iets mis is gegaan bij uw berekeningen, dan kunt u ook aangeven hoe u deze had gevonden als de berekeningen wel waren gelukt. **Ga bij de berekeningen uit van het gegeven eindtableau; motiveer uw antwoord.**

(e) Stel dat de huidige gegevens van activiteit 1 niet kloppen; c_1 en a_1 moeten worden vervangen door c_1' en a_1' die zodanig zijn dat wanneer je deze toevoegt in het tableau er -1 op de nulde rij komt te staan en $(1, 1, -1)^T$ daaronder (is reeds toegevoegd op het antwoordvel). Geef aan hoeveel deze 'communicatiefout' gaat kosten; **ga hierbij uiteraard uit van het gegeven eindtableau; motiveer uw antwoord.**

(f) Wederom een communicatiefout: de huidige rechterkantvector $b = (-1, 7, -4)^T$ deugt niet: het moet $b' = (4, -5, 6)^T$ zijn. Bepaal het effect van deze verandering op de oplossing. **Ga uiteraard weer uit van het gegeven eindtableau; motiveer uw antwoord.**

(g) Vanwege de vertaling van nieuwe richtlijnen in het productieproces wordt opgelegd dat x_1, x_3 alleen geheeltallige waarden mogen aannemen, en dat x_2 een **even, geheel getal** moet zijn.

(g1) Geef aan hoe je deze extra eis betreffende x_2 kunt vertalen in het tableau.

(g2) Leid een Gomory snede af uit dit aangepaste tableau. U hoeft deze verder niet toe te voegen, en u hoeft zeker niet te itereren.

Opgave 2.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(P)} & \text{Maximaliseer} & z = x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
 & \text{o.v.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 5 \\
 & & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 12 \\
 & & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & x_2 & & & \leq & 0 \\
 & & & & & & x_3 & & \text{vrij}
\end{array}$$

(a) Formuleer het duale probleem (D) van het bovenstaande lineair programmeringsprobleem (P) (dus zonder spelingsvariabelen). **Let erop dat (P) een maximaliseringsprobleem is!**

(b) Bewijs dat de zwakke dualiteitsstelling geldt; deze zegt dat, indien (P) een maximaliseringsprobleem is, dan is de uitkomstwaarde van (P) altijd kleiner dan of gelijk aan de uitkomstwaarde van (D).

(c) Bewijs de volgende stelling: **Als (P) een onbegrensd maximum heeft, dan is het toegelaten gebied van (D) leeg.** U mag hierbij gebruik maken van (b), ook als het bewijs niet gelukt is.

Opgave 3
Beschouw een lineair programmeringsprobleem dat zal worden opgelost met de simplex methode voor begrensde variabelen. Na een aantal iteraties is het volgende tableau gevonden:

x_1	x_2	x_3 (l)	x_4 (u)	x_5	x_6 (l)	x_7 (l)	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$
0	0	1	−1	0	−8	−3	0	59
1	0	−2	1	0	4	1	0	5
0	0	1	−1	1	5	−6	0	4
0	1	−1	−1	0	11	3	0	5
0	0	1	1	0	2	1	1	3

Hierbij zijn x_5, x_6, x_7, x_8 de spelingsvariabelen (en dus ≥ 0). Voor de overige variabelen gelden de volgende grenzen: $3 \leq x_1 \leq 9$; $0 \leq x_2 \leq 6$; $2 \leq x_3 \leq 6$; $1 \leq x_4 \leq 4$.

(a) De waarde van de doelstellingsfunctie kan worden verlaagd door x_4 te verlagen. Voer de bijbehorende iteratie uit. Geef na afloop je conclusie.

(b) Stel dat de kostencoëfficiënt c_1 wordt verhoogd met $\lambda \geq 0$. Bepaal voor welke waarden van λ het bovenstaande tableau correspondeert met een optimale oplossing.

(c) Stel dat we een variabele x_0 willen toevoegen met $-2 \leq x_0 \leq 2$; c_0 en $\mathbf{a}_0$ zijn zodanig dat $z_0 - c_0 = -2$ en $\mathbf{y}_0 = (1,1,1,1)^T$. Geef aan hoe je x_0 kunt toevoegen zodanig dat je het resulterende probleem kunt oplossen met de simplex methode voor begrensde variabelen. **Het is niet nodig dat u het nieuwe tableau opstelt; u hoeft alleen de methode te beschrijven.**

Opgave 4.
In een raffinaderij lopen twee productieprocessen waarmee normale benzine en super benzine worden geproduceerd. In iedere run van productieproces I worden 30.000 liter van ruwe oliesoort A en 80.000 liter van ruwe oliesoort B verwerkt tot 60.000 liter normaal en 40.000 liter super. In iedere run van productieproces II worden 60.000 liter A en 40.000 liter B verwerkt tot 40.000 liter normaal en 50.000 liter super. Per dag kan maximaal 30 miljoen liter ruwe olie A en 40 miljoen ruwe olie B worden aangevoerd. Beide processen maken gebruik van één en dezelfde kraakinstallatie. Een run van productieproces I kost 15 minuten; een run van productieproces II kost 42 minuten. De kraakinstallatie kan onbeperkt worden gebruikt, maar hij moet 's nachts worden onderhouden, hetgeen 6 uur kost. Een run van proces I kost (inclusief de benodigde ruwe olie) €1500,- en een run van proces II €1200,-. De marktvraag bedraagt 20 miljoen liter normaal en 15 miljoen liter super per dag. De marktprijs is €0,40 voor een liter normaal en €0,45 voor een liter super. Daarnaast kan normale en super benzine ongelimiteerd boven de marktvraag worden afgezet tegen een prijs van €0,32 resp. €0,35 per liter voor normaal en super.

(a) Formuleer het probleem van het bepalen van het optimale dagelijkse productieschema als een (geheeltallig) lineair programmeringsprobleem.

Vanwege nieuwe voorschriften moet de kraakinstallatie na iedere serie van 5 runs van productieproces I worden schoongemaakt; dit duurt 10 minuten, indien je daarna doorgaat met runs van productieproces I. Evenzo moet de kraakinstallatie na iedere serie van 3 runs van productieproces II worden schoongemaakt; dit duurt 12 minuten, indien je daarna doorgaat met runs van productieproces II. Wanneer je overstapt van productieproces I naar productieproces II, dan moet de kraakinstallatie grondig worden gereinigd; dit duurt 45 minuten. Omgekeerd, van productieproces II naar I overstappen vergt een reiniging van 60 minuten. Wanneer je bijv. op een dag 10 runs van I uitvoert en daarna 7 runs van II, dan moet je eenmaal een schoonmaakronde van 10 minuten uitvoeren binnen I, dan een reiniging van 45 minuten tusssen I en II, en dan nog tweemaal een schoonmaakronde van 12 minuten binnen II. Tijdens het nachtelijk onderhoud van 6 uur wordt de installatie dan weer in orde gemaakt om de volgende dag met proces I dan wel II te beginnen. Het onderhoud van 6 uur in de avond blijft hetzelfde.

(b) Analyseer het schoonmaakproces en bepaal zoveel mogelijk kenmerken van een optimaal productieschema.

(c) Geef aan hoe u de formulering van (a) moet aanpassen om rekening te houden met het schoonmaken. Geef hierbij alleen aan wat er verandert.