Universiteit Utrecht
Departement Informatica

Toets Optimalisering op donderdag 18 december 2014, 13.30-15.30 uur.

- **Mobieltjes UIT** en diep weggestopt.
- Het gebruik van een **rekenmachine** is niet nodig en dus ook **niet toegestaan.**
- Het is **niet** toegestaan om er een 'spiekbrief' bij te houden.
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over drie bladzijden. Verder is er een antwoordenblad toegevoegd voor vraag 3.
- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Wanneer je breuken met een noemer groter dan 4 tegenkomt, dan is er vermoedelijk iets misgegaan. Inverteren van een matrix kost tijd, is foutgevoelig, en is bovendien overbodig bij deze toets.
- Het hoor- en werkcollege van dinsdag 6 januari gaat waarschijnlijk niet door; houd de website in de gaten.
- **Wie zowel de tussentoets als het tentamen ter beoordeling heeft ingeleverd en op beide minder dan een 4.0 heeft gehaald kan niet meedoen aan het hertentamen. Wie bij de toets dan wel het tentamen niets inlevert mag sowieso meedoen aan het hertentamen (en inleveren van het gemaakte werk is niet verplicht).**

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 40 punten):
Opgave 1: 4 punten.
Opgave 2: (a) 5 punten, (b) 3 punten, (c) 3 punten.
Opgave 3: (a) 10 punten, (b) 4 punten, (c) 4 punten.
Opgave 4: (a) 4 punten, (b) 3 punten.

Succes!

==

Opgave 1.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & \\
& \text{o.v.} & & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 5 \\
& & & & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \geq & 0 \\
& & & & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \leq & -4 \\
& & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Laat x_5, x_6, x_7 de spelingsvariabelen zijn. Geef het starttableau van de eerste fase dat gebruikt kan worden om een TBO te vinden. Nadat je het begintableau hebt bepaald **hoef je niet te itereren.**

Opgave 2
Beschouw het volgende probleem, dat we het BESTELPROBLEEM zullen noemen. Een inkoopmanager, laten we hem Angelo noemen (maar Loenga mag ook), moet producten bestellen, gedurende T perioden. Er zijn in totaal n verschillende producten. Voor ieder product j $(j = 1, \ldots, n)$ en voor iedere periode t $(t = 1, \ldots, T)$ is bekend hoeveel de vraag D_{jt} is; nalevering is niet toegestaan. De inkoopkosten per eenheid bedragen c_{jt} voor product j $(j = 1, \ldots, n)$ in periode t $(t = 1, \ldots, T)$; verder zijn er nog vervoerskosten v_j per eenheid product j $(j = 1, \ldots, n)$ (deze zijn in iedere periode gelijk). Het is mogelijk om voorraden aan te houden; dit kost h per eenheid product per periode (dit is dus voor alle producten en alle perioden gelijk). Aan het begin is een voorraad P_j van product j $(j = 1, \ldots, n)$ beschikbaar; aan het eind moet van ieder product j een eindvoorraad van Q_j beschikbaar zijn. Je mag aannemen dat het bestellen en leveren van product j $(j = 1, \ldots, n)$ geen tijd kost: goederen die in periode t worden besteld kunnen worden gebruikt om aan de vraag in periode t $(t = 1, \ldots, T)$ te voldoen. Uiteraard wil Angelo een toegelaten oplossing met minimale kosten.

(a) Formuleer het BESTELPROBLEEM als een (I)LP-probleem. **Geef hierbij netjes aan wat de beslissingsvariabelen, beperkingen en doelstellingsfunctie voorstellen.**

(b) Het vervoer van de producten wordt uitgevoerd door busjes die een capaciteit C hebben. Naast de vervoerskosten v_j per eenheid product j blijken er ook nog vaste kosten per rit per busje te zijn; deze bedragen K per rit, ongeacht hoeveel je erin vervoert (zolang het maar niet meer dan C is). Het is niet mogelijk om verschillende producten tegelijk in een busje te vervoeren. Geef aan hoe u de formulering bij (a) moet aanpassen om deze variant van het probleem als (I)LP te modelleren.

(c) Angelo (Loenga) vindt al dat bestellen toch wel erg hard werken. Daarom onderzoekt hij hoeveel het extra kost indien in iedere periode t $(t = 1, \ldots, T)$ maximaal b_t van de n producten worden besteld (het aantal eenheden dat van ieder product wordt besteld is hierbij niet van belang). Geef aan hoe u de **formulering bij (a), dus vergeet de vaste vervoerskosten van (b)** moet aanpassen om deze variant van het probleem als (I)LP te modelleren.

Opgave 3

Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 & & \\
& \text{o.v.} & & & a_{11}x_1 & + & 4x_2 & - & 7x_3 & \geq & b_1 \\
& & & & a_{21}x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & \leq & b_2 \\
& & & & a_{31}x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & \leq & b_3 \\
& & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Laat x_4, x_5, x_6 de spelingsvariabelen zijn. Het volgende tableau is het laatste tableau van de tweede fase.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
0	0	p	-1	d	-1	W
0	1	-1	2	0	3	3
0	0	-1	1	1	1	1
1	0	-1	-3	0	-4	2

(a) Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, c_BB^{-1} en de optimale oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord.** Bepaal $a_{11}, a_{21}, a_{31}, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, d, W$ en B. **Je hoeft de waarden niet se in deze volgorde te bepalen; het is verstandig om goed naar de volgorde te kijken. De waarden van p en c_3 hoef je niet te bepalen.** Ga daarbij uit van de gegeven instantie; houd er rekening mee dat de eerste beperking een $\geq$ teken bevat. Schrijf na afloop van je berekeningen de antwoorden op het antwoordenblad. Wanneer je niet aan de benodigde gegevens kunt komen, dan kun je punten verdienen door de formule te geven die je zou kunnen gebruiken indien je de benodigde gegevens wel zou hebben.

(b) Wat moet er voor de waarde van c_3 gelden zodat je op grond van het huidige tableau kunt concluderen dat er sprake is van een onbegrensd minimum? Geef de bijbehorende richting $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_6)^T$.

(c) Voeg een nieuwe variable x_0 toe aan het probleem. Deze variabele x_0 heeft c_0 en a_0 zodanig dat in het tableau onder x_0 komt te staan $(1, 1, -1, 1)$ (zie extra blad). Voer 1 (en niet meer) iteratie uit waarbij de oplossing wordt verbeterd. Geef na afloop aan wat de gevonden oplossing is (punt en waarde). Geef ook aan of deze oplossing optimaal is. **Motiveer uw antwoord.** Vul hierbij voor p de waarde van -10 in. Gebruik $W = 0$ indien u deze waarde niet bij (a) hebt kunnen vinden (deze waarde is waarschijnlijk niet correct).

Opgave 4

Stel dat je **maximaliseringsprobleem** $\{\max\ z = cx \text{ s.t. } Ax = b,\ x \geq 0\}$ wilt oplossen met de simplex methode. Stel verder dat er een TBO gegeven is en dat je het bijbehorende tableau kent (dit tableau is hetzelfde als bij het minimaliseringsprobleem).

(a) Toon aan dat de huidige TBO optimaal is indien alle elementen op de nulde rij (met uitzondering van de waarde van de doelstellingsfunctie) groter dan of gelijk aan 0 zijn.

(b) Stel dat niet aan de voorwaarde van (a) is voldaan, zodat je moet itereren. Kun je hierbij weer dezelfde ratio regel gebruiken als bij een minimaliseringsprobleem? Motiveer uw antwoord.