Universiteit Utrecht
Betaculteit

Herexamen Optimalisering op donderdag 12 maart 2015, 13.30-16.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het gebruik van een **rekenmachine** is **niet toegestaan** (en het is ook niet nodig).
- Het is toegestaan om een legale spiekbrief in de vorm van een eenzijdig beschreven/bedrukt A4'tje zonder uitklapvellen e.d. bij het tentamen te houden.
- Indien u met de simplexmethode breuken met een noemer groter dan 4 vindt, dan hebt u een rekenfout gemaakt.
- **Voer bij ieder onderdeel maximaal 1 iteratie uit, tenzij anders aangegeven. Ga steeds uit van het tableau vermeld aan het begin van de opgave. Vermeld na afloop het gevonden punt en zeg of dit punt optimaal is. Indien het minimum onbegrensd is, vermeld dan ook een richting. Indien er geen toegelaten oplossing is, geef dan aan waarom.**
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over vier bladzijden.
- Voor de vragen 1a, 1b, 1d, 1e en 4b zijn er antwoordvellen beschikbaar. U bent niet verplicht die te gebruiken. U bent ook niet verplicht om alle vakjes en regels van de tableaus op de antwoordvellen te gebruiken.
- Het cijfer op het hertentamen kan worden gebruikt om het cijfer op de tussentoets, op het tentamen, of op beide op te hogen (verlagen is niet mogelijk).

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 60 punten):
Opgave 1: (a) 10 punten, (b) 3 punten, (c) 4 punten, (d) 5 punten (e) 5 punten, (f) 4 punten, (g) 3 punten.
Opgave 2: (a) 4 punten, (b) 3 punten, (c) 4 punten.
Opgave 3: 8 punten.
Opgave 4: (a) 2 punten, (b) 5 punten.

Succes!

===

Opgave 1.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} \quad z = & 44x_1 & + & c_2x_2 & - & 24x_3 & + & 3x_4 & & \\
& \text{o.v.} & -7x_1 & + & a_{12}x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & \leq & b_1 \\
& & 3x_1 & + & a_{22}x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & b_2 \\
& & -2x_1 & + & a_{32}x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & b_3 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Voeg spelingsvariabelen x_5, x_6, x_7 toe. Het probleem wordt opgelost met behulp van de simplex methode. Het volgende tableau is het laatste tableau van de tweede fase.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
-1	0	0	d	-5	0	-4	W
-1	0	1	e	1	0	-3	2
-3	0	0	f	-2	1	10	5
-1	1	0	g	-1	0	4	1

(a) Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, c_BB^{-1} en de optimale oplossing (punt en waarde). Bepaal B en $a_{12}, a_{22}, a_{32}, c_2, b_1, b_2, b_3, d, e, f, g, W$. **Ga daarbij uit van de instantie die aan het begin van deze opgave is gegeven met daaraan toegevoegd de spelingsvariabelen. Zet de antwoorden op het antwoordvel.**

Vergeet vanaf nu de variabele x_4. Op de plaats van x_4 komt x_0 te staan op het antwoordvel.

(b) Voeg de variabele x_0 toe aan dit tableau; onder x_0 komt **in het tableau** te staan $(1, 1, 1, -1)^T$. Los dit nieuwe probleem op (**maximaal één iteratie**); verklaar duidelijk de door u gemaakte keuzes bij het bepalen van de pivot. Gebruik $W = 0$ indien u de correcte waarde niet hebt kunnen bepalen.

(c) We verhogen c_3 met λ, en passen het tableau gegeven bij (a) aan zodanig dat er weer een correct eindtableau ontstaat. Bepaal de grenzen l en u zodaning dat voor iedere waarde van λ met $l \leq \lambda \leq u$ geldt dat het eindtableau correspondeert met een optimale oplossing.

(d) Voeg de nieuwe beperking $10x_1 - 4x_2 - 5x_3 \leq -15$ toe. Los het resulterende probleem op uitgaande van het tableau gegeven bij (a). Gebruik weer $W = 0$ indien u de correcte waarde niet hebt kunnen bepalen. Voer maximaal één iteratie (waarbij wordt gepivoteerd) uit.

(e) Laat de eerste beperking $-7x_1 + a_{12}x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq b_1$ weg. Los het resulterende probleem op uitgaande van het tableau gegeven bij (a); gebruik weer $W = 0$ indien u de correcte waarde niet hebt kunnen bepalen. Voer maximaal twee iteraties (waarbij wordt gepivoteerd) uit.

(f) Bewijs, uitgaande van het tableau bij (a), dat iedere toegelaten oplossing met $x_1 = \Delta$ een doelstellingsfunctiewaarde heeft van minstens $W + \Delta$.

(g) Gegeven dat $b_1, b_3 > 0$ en $b_2 < 0$, stel het tableau op dat gebruikt kan worden in de eerste fase om een TBO te vinden. **Het gaat hierbij om het opstellen van het tableau; u hoeft hierbij geen enkele iteratie uit te voeren.**

Opgave 2.

(a) Ga uit van een primaal probleem (P), waarbij (P) een **maximaliseringsprobleem is.** Wanneer (P) wordt gedualiseerd, dan vindt u het duale probleem (D). Stel dat u een toegelaten oplossing $\bar{x}$ van (P) en een toegelaten oplossing $\bar{w}$ van (D) kent waarvoor geldt dat de waarde van de doelstellingsfunctie in beide punten gelijk is. Bewijs dat $\bar{x}$ en $\bar{w}$ optimale oplossingen van (P) en (D) zijn. U mag er hierbij gebruik van maken dat de zwakke dualiteitsstelling geldt; deze zegt dat (in het geval dat (P) een maximaliseringsprobleem is) de doelstellingsfunctiewaarde van iedere toegelaten oplossing van (P) altijd kleiner is dan of gelijk is aan de doelstellingsfunctie van iedere toegelaten oplossing van (D).

(b) Stel dat probleem (D) een onbegrensd minimum heeft. Waaraan merkt u dit bij het oplossen van probleem (P) met de simplex methode? **Motiveer uw antwoord.**

(c) Gegeven is het probleem (P):

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Maximaliseer} & z = & 5x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & & \\
 & \text{o.v.} & & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 20 \\
 & & & 4x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 5 \\
 & & & -3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \geq & 8 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_3 & & & & & & & \leq & 0
\end{array}
$$

x_4 kan alle mogelijke waarden aannemen. Bepaal het duale probleem (D) horend bij (P).

Opgave 3

Bij het vak SMOI moet bier worden gebrouwen; het probleem hieronder is daarvan afgeleid. Er zijn 7 typen bier die je kunt produceren; deze worden kortweg $bier(j)$ ($j = 1, \ldots, 7$) genoemd. Om bier te brouwen moeten productiemiddelen worden aangeschaft; het is mogelijk om deze zogeheten Productie Clusters (PCs) te huren. Er zijn 6 typen PCs, die we noteren als $PC(i)$ ($i = 1, \ldots, 6$). Voor iedere $PC(i)$ is gegeven hoeveel euro deze kost om te leasen (notatie c_i) en hoeveel je van ieder type bier kunt produceren met één zo'n $PC(i)$ (hierbij geeft a_{ij} het aantal kratjes aan dat je kunt produceren van $bier(j)$ op $PC(i)$). Van ieder type PC zijn er genoeg exemplaren om te huren; op ieder exemplaar van type $PC(i)$ ($i = 1, \ldots, 6$) kun je maar één soort bier produceren (maar je kunt wel op twee verschillende exemplaren van $PC(i)$ twee verschillende typen bier produceren). Verder heb je natuurlijk grondstoffen nodig, zoals water, malt, enz.; in totaal zijn er 10 verschillende grondstoffen. Voor de productie van één kratje $bier(j)$ heb je q_k eenheden van grondstof k ($k = 1, \ldots, 10$). De grondstoffen worden alleen in batches verkocht: een batch van grondstof k bevat B_k eenheden, en kost d_k euro. De beginvoorraad is 0 voor iedere grondstof. Wanneer er na afloop nog wat van grondstof k over is, dan kan dit worden opgeslagen voor de volgende periode; dit kost v_k per eenheid.

Na een uitgebreid marktonderzoek heeft het team besloten dat er tussen de $l(j)$ en $u(j)$ kratjes van type $bier(j)$ moeten worden geproduceerd; men verwacht deze allemaal te kunnen verkopen tegen prijs p_j per kratje. Meer kratjes produceren dan $u(j)$ mag wel, maar dit levert maar r_j per kratje op; minder produceren dan $l(j)$ kratjes is geen optie.

Formuleer het bovenstaande probleem als een (geheeltallig) lineair programmeringsprobleem.

Opgave 4
Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem dat zal worden opgelost met de simplex methode voor begrensde variabelen:

$$
\begin{array}{lllrcrcrcrcr}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z = & 9x_1 & - & 4x_2 & - & 15x_3 & + & 14x_4 & & \\
& \text{o.v.} & & -71x_1 & + & 29x_2 & + & 114x_3 & - & 101x_4 & \leq & -440 \\
& & & 3x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & \leq & b_2 \\
& & & -11x_1 & + & 4x_2 & + & 18x_3 & - & 15x_4 & \leq & -67 \\
& & & 5x_1 & - & 2x_2 & - & 7x_3 & + & 9x_4 & \leq & 44 \\
& & & & & 3 & \leq & x_1 & \leq & 9 & & \\
& & & & & 2 & \leq & x_2 & \leq & 6 & & \\
& & & & & 2 & \leq & x_3 & \leq & 6 & & \\
& & & & & 1 & \leq & x_4 & \leq & 4 & &
\end{array}
$$

Voer spelingsvariabelen x_5, x_6, x_7 en x_8 in. Na een aantal iteraties is het volgende tableau gevonden:

		l	u		l	l		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$
0	0	1	−1	0	−8	−3	0	59
1	0	−2	1	0	4	1	0	5
0	0	1	−1	1	5	−6	0	4
0	1	−1	−1	0	11	3	0	3
0	0	1	1	0	2	1	1	3

(a) Bepaal de correcte waarde van b_2.

(b) De waarde van de doelstellingsfunctie kan worden verlaagd door x_4 te verlagen. Voer de bijbehorende iteratie uit. Geef na afloop het punt dat correspondeert met het nieuwe tableau en de bijbehorende waarde. **U hoeft dus niet door te gaan tot een optimum is gevonden.**