Universiteit Utrecht
Faculteit Wiskunde en Informatica

Examen Optimalisering op maandag 7 juli 2003, 14.00-17.00 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- **Mobieltjes UIT** en diep weggestopt.
- Het gebruik van een **rekenmachine** is **niet toegestaan**.
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over vier bladzijden.

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 70 punten):
Opgave 1: (a) 3 punten, (b) 5 punten, (c) 4 punten.
Opgave 2: (a) 3 punten, (b) 11 punten, (c) 2 punten, (d) 4 punten, (e) 4 punten, (f) 4 punten, (g) 4 punten, (h) 4 punten.
Opgave 3: (a) 6 punten, (b) 6 punten.
Opgave 4: (a) 2 punten, (b) 3 punten, (c) 5 punten.

Succes!

==

Opgave 1.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcr}
\text{(P)} & \text{Maximaliseer} & z & = & 7x_1 & + & 29x_2 & + & 12x_3 & & \\
 & \text{o.v.} & & & -x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & \geq & 2 \\
 & & & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -3 \\
 & & & & -x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & \geq & 2 \\
 & & & & x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & -4 \\
 & & & & x_1 & , & x_2 & & & \leq & 0 \\
 & & & & & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) Formuleer het duale probleem (D) van het bovenstaande lineair programmeringsprobleem (P). Gebruik duale variabelen w_1, w_2, w_3 en w_4.

(b) Voer spelingsvariabelen x_4, x_5, x_6 en x_7 in in (P) en spelingsvariabelen w_5, w_6 en w_7 in (D). Ga met behulp van de complementaire spelingsrelaties na of $w^* = (0, 2, 0, 5, 0, 5, 0)$ een optimale oplossing van (D) is; hierbij mag u aannemen dat w^* een toegelaten oplossing van (D) is.

(c) Beschouw een lineair programmeringsprobleem (P) van de vorm $\min\{cx | Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ en laat (D) de duale van (P) zijn. Bewijs het volgende: als (P) een onbegrensd minimum heeft, dan heeft (D) een leeg toegelaten gebied.
U mag er hierbij van uit gaan dat de zwakke dualiteitsstelling geldt.

Opgave 2.

Voer bij de onderdelen (d) t/m (h) steeds precies één iteratie uit. Geef na afloop aan welke oplossing bij het laatste tableau hoort (waarde en punt), of deze toegelaten is, en of deze optimaal is. Wanneer u concludeert dat het toegelaten gebied leeg is, of dat het minimum onbegrensd is, dan dient u aan te geven waarom dit zo is. Indien u breuken met een noemer groter dan 4 vindt, dan hebt u een rekenfout gemaakt.

Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z = & 3x_1 & + & c_2x_2 & - & 19x_3 & + & c_4x_4 & & \\
 & \text{o.v.} & & 2x_1 & + & a_{12}x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & b_1 \\
 & & & 3x_1 & + & a_{22}x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \geq & b_2 \\
 & & & x_1 & + & a_{32}x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & b_3 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) Gegeven dat b_1, b_2, b_3 alle drie positief zijn, geef het starttableau van de eerste fase.

(b) Laat x_5, x_6, x_7 de spelingsvariabelen zijn. Het volgende tableau is het laatste tableau van de tweede fase.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
d	-2	0	0	-4	0	-3	W
e	1	1	0	1	0	-3	4
f	-1	0	0	1	1	-1	1
g	1	0	1	-1	0	4	5

Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, c_BB^{-1} en de optimale oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord**. Bepaal B en de correcte waarden voor $c_2, c_4, a_{12}, a_{22}, a_{32}, b_1, b_2, b_3, d, e, f, g, W$.

NB: Ga hierbij uit van het probleem zoals hierboven geformuleerd met daaraan toegevoegd de spelingsvariabelen. Laat bij (a) uitgevoerde bewerkingen buiten beschouwing! Let op het $\geq$ teken in de tweede beperking.

(c) Geef ook de optimale oplossing van het duale probleem. (Het is niet nodig om hiervoor het duale probleem af te leiden).

(d) Ga uit van tableau (b) zonder x_1.
Voeg de variabele x_0 toe aan dit tableau. **In het tableau** geldt voor deze variabele $z_0 - c_0 = 1$ en de bijbehorende kolom is $y_0 = (2, 1, 3)^T$. Bepaal nu de optimale oplossing en optimale waarde. Verklaar de door u gemaakte keuzes bij het bepalen van de pivot. Als U in (b) de waarde W niet heeft berekend gebruik dan $W = 0$ (dit is niet het goede antwoord).

(e) Ga weer uit van tableau (b) zonder x_1 (dus laat x_0 en de in (d) uitgevoerde berekeningen buiten beschouwing).
Stel dat in het **originele** probleem de rechterkant gelijk wordt aan $(18, 14, 5)^T$ (in plaats van de huidige $(b_1, b_2, b_3)^T$). Bepaal nu de optimale oplossing en optimale waarde. Motiveer uw aanpak.

(f) Ga weer uit van het originele probleem (P) en van tableau (b) zonder x_1 (dus laat x_0 en de rechterkant uit onderdeel (e) en de in (d) en (e) uitgevoerde berekeningen buiten beschouwing).
Stel dat in het **originele** probleem (P) de coëfficiënt c_3 gelijk wordt aan -16. Bepaal nu de optimale oplossing en optimale waarde. Motiveer uw aanpak.

(g) Ga weer uit van het originele probleem (P) en van tableau (b) zonder x_1 (dus laat alle ondertussen uitgevoerde berekeningen en aanpassingen buiten beschouwing).
Stel dat uit (P) de eerste beperking wordt geschrapt. Los het resterende probleem op; motiveer uw aanpak.

(h) Ga weer uit van het originele probleem (P) en van tableau (b) zonder x_1 (dus laat alle ondertussen uitgevoerde berekeningen en aanpassingen buiten beschouwing).
Door een 'communicatiestoornis' blijkt de tweede beperking verkeerd geformuleerd te zijn: het huidige $\geq$ teken had een $=$ teken moeten zijn. Los het resterende probleem op (dit kan in één iteratie); motiveer uw aanpak.

Opgave 3

Stel u werkt bij een grote drankenproducent (bijv. frisdrank, maar bier zou ook kunnen; dat hangt van het verloop van uw carrière af). Uw bedrijf heeft één fabriek waar de frisdrank wordt geproduceerd. De levering van frisdranken naar de klanten (in dit geval supermarkten en horeca-gelegenheden) verloopt in twee stappen. De frisdrank gaat eerst van de fabriek naar een distributiecentrum en vervolgens van het distributiecentrum naar de klant. Uw bedrijf beschikt over m distributiecentra, en transport van de fabriek naar distributiecentrum i $(i = 1, \ldots, m)$ kost f_i per eenheid. Distributiecentrum i kan maximaal p_i eenheden verwerken. Verder zijn er n klanten; van iedere klant is bekend hoeveel deze wil ontvangen (deze hoeveelheid is gedefinieerd als d_j $(j = 1, \ldots, n)$). De leveringskosten van distributiecentrum i aan klant j bedragen c_{ij} per eenheid. U mag aannemen dat de productie en de totale capaciteit van de distributiecentra voldoende is om aan de vraag naar frisdrank te voldoen. Verder is het geen probleem als een klant frisdrank van meerdere distributiecentra ontvangt. Uiteraard is het de bedoeling dat de totale leveringskosten (dus transportkosten naar de distributiecentra en de kosten om de klanten te beleveren) worden geminimaliseerd.

Uw manager (een omhooggevallen informatiekundige) overweegt om een consultant in te huren om uit te zoeken hoe dit moet, maar dat is wel kostbaar. Dan herinnert u zich dat het bovenstaande iets te maken heeft met Lineaire Programmering en dat u die theorie tot in de puntjes beheerst. Kortom, u gaat zelf aan de slag met het probleem.

(a) Formuleer het probleem van het minimaliseren van de totale leveringskosten onder de bovenstaande voorwaarden als een LP-probleem. **Geef hierbij netjes aan wat de beslissingsvariabelen, beperkingen en doelstellingsfunctie voorstellen.**

(b) U komt erachter dat de totale capaciteit van de distributiecentra meer dan voldoende is om aan de vraag te voldoen. U overweegt daarom om een aantal distributiecentra te sluiten. Gegeven is dat het gebruik van distributiecentrum i kosten q_i met zich meebrengt; die kunt u besparen door het distributiecentrum te sluiten. Formuleer nu het probleem van het minimaliseren van de totale leverkosten inclusief de kosten van het gebruik van de distributiecentra als een geheeltallig LP-probleem. **Geef hierbij weer netjes aan wat de beslissingsvariabelen, beperkingen en doelstellingsfunctie voorstellen.**

Opgave 4

Bij deze opgave worden de volgende twee problemen gebruikt: PARTITIE en SUBSET SUM. Het probleem PARTITIE is als volgt gedefinieerd: Gegeven zijn n gehele, niet-negatieve getallen $a_1, \ldots, a_n$ met $\sum_{j=1}^{n} a_j = 2A$. Bestaat er een deelverzameling S van $\{1, \ldots, n\}$ zodanig dat $\sum_{j \in S} a_j = A$?

Het probleem SUBSET SUM is als volgt gedefinieerd: Gegeven zijn t gehele, niet-negatieve getallen $b_1, \ldots, b_t$ en een geheel getal B. Bestaat er een deelverzameling T van $\{1, \ldots, t\}$ zodanig dat $\sum_{j \in T} b_j = B$?

(a) Toon aan dat het probleem SUBSET SUM tot de klasse NP behoort.

(b) Stel dat bekend is dat het probleem PARTITIE NP-volledig is. Toon aan dat u daaruit kunt afleiden dat het probleem SUBSET SUM ook NP-volledig is.

(c) Nu zijn de rollen omgekeerd: Stel dat bekend is dat het probleem SUBSET SUM NP-volledig is. Toon aan dat u daaruit kunt afleiden dat het probleem PARTITIE ook NP-volledig is.
Hint. Gebruik twee 'hulpgetallen'.