Universiteit Utrecht
Departement Informatica

Toets Optimalisering op dinsdag 20 december 2016, 11.00-13.00 uur.

- **Mobieltjes UIT** en diep weggestopt in je tas.
- Het gebruik van een **rekenmachine** is niet nodig en dus ook **niet toegestaan**.
- Het is **niet** toegestaan om er een 'spiekbrief' bij te houden.
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over drie bladzijden. Verder is er een antwoordenblad toegevoegd voor vraag 3.
- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Wanneer je breuken met een noemer groter dan 4 tegenkomt, dan is er vermoedelijk iets misgegaan. Inverteren van een matrix kost tijd, is foutgevoelig, en is bovendien overbodig bij deze toets.
- **Wie zowel de tussentoets als het tentamen ter beoordeling heeft ingeleverd en op beide minder dan een 4.0 heeft gehaald kan niet meedoen aan het hertentamen. Wie bij de toets dan wel het tentamen niets inlevert mag sowieso meedoen aan het hertentamen (en inleveren van het gemaakte werk is niet verplicht).**
- **Voor de vakken in de derde en vierde periode worden student-assistenten gezocht. Je kunt je aanmelden via de education site.**

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 40 punten):
Opgave 1: 4 punten.
Opgave 2: (a) 6 punten, (b) 3 punten, (c) 3 punten.
Opgave 3: (a) 10 punten, (b) 3 punten, (c) 4 punten.
Opgave 4: (a) 4 punten, (b) 3 punten.

Succes!

==

Opgave 1.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & & \\
& \text{o.v.} & & & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \geq & 5 \\
& & & & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 8 \\
& & & & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \leq & -4 \\
& & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Laat x_5, x_6, x_7 de spelingsvariabelen zijn. Geef het starttableau van de eerste fase dat gebruikt kan worden om een TBO te vinden. Nadat je het begintableau hebt bepaald **hoef je niet te itereren**.

Opgave 2
Beschouw het volgende probleem, dat we het ROOSTERPROBLEEM zullen noemen. Er zijn n werknemers, die allen m van de perioden $1, \ldots, T$ aan het werk gaan. Om de arbeidsvreugde te maximaliseren wordt aan iedere werknemer gevraagd hoeveel werkplezier hij/zij ontleent aan het werken in periode t ($t = 1, \ldots, T$); gebruik w_{jt} als de werkplezierscore van persoon j voor periode t. Gegeven een rooster wordt de hoeveelheid werkplezier van werknemer j berekend als de som van de w_{jt} waarden over de perioden waarin j aan het werk is. In periode t ($t = 1, \ldots, T$) zijn minstens l_t werknemers nodig; het maakt (voorlopig) niet uit hoeveel er werken, zolang het er maar minstens l_t zijn. Om te voorkomen dat werknemers een prutrooster krijgen wordt voor iedere werknemer een ondergrens k_j ($j = 1, \ldots, n$) bepaald; een rooster is alleen toegelaten indien iedere werknemer j ($j = 1, \ldots, n$) een hoeveelheid werkplezier ontleent aan zijn rooster dat $\geq k_j$ is. Het doel is het bepalen van een toegelaten rooster waarin de totale hoeveelheid werkplezier maximaal is.

(a) Formuleer het ROOSTERPROBLEEM als een (I)LP-probleem. **Geef hierbij netjes aan wat de beslissingsvariabelen, beperkingen en doelstellingsfunctie voorstellen.**

(b) Het bedrijf heeft bedacht dat, als er minstens q werknemers meer aanwezig zijn in een tijdsperiode t dan de minimaal benodigde l_t (dus minstens $l_t + q$ in totaal), dan is het mogelijk om in die periode t een training te organiseren. Om in aanmerking te komen voor een (verder volstrekt nutteloos) certificaat moet er minstens 5 maal worden getraind. Het doel wordt nu het bepalen van een toegelaten rooster waarin de totale hoeveelheid werkplezier maximaal is met als bijkomende voorwaarde dat er in minstens 5 perioden wordt getraind. Geef aan hoe u de formulering bij (a) moet aanpassen om deze variant van het probleem als (I)LP te modelleren.

(c) Het blijkt dat het goed mogelijk is om aan die extra eis van 5 trainingen te voldoen, maar de hoeveelheid trainingen is nogal ongelijk verdeeld onder de werknemers. Daarom wordt de eis van minstens 5 trainingsperioden vervangen door de eis dat iedere werknemer werkzaam moet zijn in minstens 3 perioden waarin wordt getraind. De overige eisen blijven gelijk. Het doel is weer het bepalen van een toegelaten rooster waarin de totale hoeveelheid werkplezier maximaal is. Geef aan hoe u de formulering bij (b) moet aanpassen om deze variant van het probleem als (I)LP te modelleren.

Opgave 3
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & 15x_3 & & \\
& \text{o.v.} & & & a_{11}x_1 & & & + & x_3 & \leq & b_1 \\
& & & & a_{21}x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \geq & b_2 \\
& & & & a_{31}x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & b_3 \\
& & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Laat x_4, x_5, x_6 de spelingsvariabelen zijn. Het volgende tableau is het laatste tableau van de tweede fase.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
0	0	p	0	-1	-1	W
0	0	q	1	1	-2	2
0	1	r	0	1	-1	1
1	0	s	0	-1	2	3

(a) Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, c_BB^{-1} en de optimale oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord**. Bepaal $a_{11}, a_{21}, a_{31}, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, p, q, r, s, W$ en B. **Je hoeft de waarden niet se in deze volgorde te bepalen; het is verstandig om goed naar de volgorde te kijken.** Ga daarbij uit van de gegeven instantie; houd rekening met de $\geq$ tekens. Schrijf na afloop van je berekeningen de antwoorden op het antwoordenblad. Indien je een bepaalde waarde niet hebt kunnen vinden, dan mag je doorrekenen met waarde 1 (waarschijnlijk niet de correcte waarde); **geef dit duidelijk aan**.

(b) Geef het tableau van de **Revised Simplex** methode. Geef de formules indien u bij (a) de correcte waarden niet hebt kunnen vinden; eigenlijk kan het sowieso geen kwaad om de formules erbij te zetten.

(c) Laat de variabele x_3 weg uit het probleem en voeg de nieuwe variable x_0 toe aan het probleem (op het antwoordvel wordt deze overigens weer x_3 genoemd). Deze variabele x_0 heeft c_0 en a_0 zodanig dat in het tableau onder x_0 komt te staan $(1, 1, -1, 1)$ (zie extra blad). Voer 1 (en niet meer) iteratie uit waarbij de oplossing wordt verbeterd. Geef na afloop aan wat de gevonden oplossing is (punt en waarde). Geef ook aan of deze oplossing optimaal is. **Motiveer uw antwoord**.

Opgave 4
Stel dat je **maximaliseringsprobleem** $\{\max\ z = cx \text{ s.t. } Ax = b,\ \ x \geq 0\}$ wilt oplossen met de simplex methode.

(a) Geef aan hoe je kunt nagaan of het toegelaten gebied leeg is. **Motiveer en bewijs uw antwoord.**

(b) Stel dat er een TBO gegeven is en dat je het bijbehorende tableau kent (dit tableau is hetzelfde qua opzet als bij het minimaliseringsprobleem). Geef aan hoe je in een tableau een oneindig maximum kunt herkennen. **U hoeft geen bewijs te leveren, maar u moet wel een motivatie geven over het hoe en waarom**. Let op dat het om een maximaliseringsprobleem gaat.