Universiteit Utrecht
Faculteit Wiskunde en Informatica

Examen Optimalisering op vrijdag 3 februari 2012, 13.30-16.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het gebruik van een **rekenmachine** is **niet toegestaan** (en het is ook niet nodig).
- Indien u met de simplexmethode breuken met een noemer groter dan 4 vindt, dan hebt u een rekenfout gemaakt.
- **Voer bij ieder onderdeel maximaal 1 iteratie uit, tenzij anders aangegeven. Vermeld na afloop het gevonden punt en zeg of dit punt optimaal is. Indien het minimum onbegrensd is, vermeld dan ook een richting. Indien er geen toegelaten oplossing is, geef dan aan waarom**.
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over vier bladzijden.
- Voor de vragen 1a, 1b, 1c en 3 zijn er antwoordvellen beschikbaar. U bent niet verplicht die te gebruiken. U bent ook niet verplicht om alle vakjes en regels van de tableaus op de antwoordvellen te gebruiken.
- Vergeet niet de evaluatie in te vullen.

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 60 punten):
Opgave 1: (a) 5 punten, (b) 6 punten, (c) 7 punten, (d) 4 punten, (e) 8 punten, (f) 6 punten.
Opgave 2: 8 punten.
Opgave 3: 6 punten.
Opgave 4: (a) 5 punten, (b) 5 punten.

Succes!

==

Opgave 1.

Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$
\begin{array}{lllrcrcrcr}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z = & c_1x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\
& \text{o.v.} & & 2x_1 & + & a_{12}x_2 & + & x_3 & \leq & 7 \\
& & & -x_1 & + & a_{22}x_2 & - & x_3 & \leq & -6 \\
& & & -x_1 & + & a_{32}x_2 & - & x_3 & \leq & -3 \\
& & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Laat x_4, x_5, x_6 de spelingsvariabelen zijn. Het volgende tableau is het laatste tableau van de tweede fase.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
0	0	0	-2	-1	-3	1
0	0	1	-1	-1	-1	2
0	1	0	0	-1	1	3
1	0	0	1	0	1	4

(a) Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, c_BB^{-1} en de optimale oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord**. Bepaal a_{12}, a_{22}, a_{32}, c_1 en B. **Ga daarbij uit van de gegeven instantie, ook al is de rechterkant daarin niet** ≥ 0.

De verschillende onderdelen van deze opgave kunnen onafhankelijk van elkaar worden gemaakt. **Geef na afloop altijd de oplossing (punt en waarde) die bij het tableau hoort en verklaar waarom deze wel/niet optimaal is. Wanneer het minimum onbegrensd is, geef dan de bijbehorende richting; wanneer het toegelaten gebied leeg is, verklaar dan waarom.**

(b) Voeg de nieuwe beperking $x_1 \leq 3$ toe aan het oorspronkelijke probleem en los het op **uitgaande van het gegeven tableau.** Geef ook aan wat u anders gedaan zou hebben indien u de beperking $x_1 = 3$ had moeten toevoegen.

(c) Stel dat de eerste beperking wordt weggelaten. Los het nieuwe probleem op uitgaande van het gegeven tableau. **Voer maximaal twee iteraties uit**.

(d) Het management heeft besloten dat de activiteit x_3 moet worden afgebouwd. Geef aan waarom dat niet zo'n goed idee is.

(e) De schaduwprijs van de $i$de beperking (noem deze π_i) kan worden gebruikt om te zien wat het effect is van een kleine verandering in de waarde van b_i. Stel dat we b_1 **verlagen met** $\epsilon(\geq 0)$; de uitkomstwaarde van dit probleem, dus met $b_1 = 7 - \epsilon$ noteren we als $W(\epsilon)$.

- Bepaal de schaduwprijs π_1 van de eerste beperking.
- Bewijs dat voor ϵ *klein genoeg* geldt dat $W(\epsilon) = W - \epsilon\pi_1$
- Ga na hoeveel ϵ maximaal mag zijn zodanig dat deze relatie blijft gelden.

(f) Stel dat er een nieuwe variabele x_0 wordt toegevoegd met kostencoëfficiënt c_0 en kolom a_0; verder geldt dat $-1 \leq x_0 \leq 1$. Geef aan hoe u x_0 kunt toevoegen zodanig dat u daarna door kunt gaan met de simplex methode voor begrensde variabelen. U hoeft dit niet uit te voeren, maar u moet wel aangeven wat er zal gebeuren in de eerste iteratie van de simplex methode voor begrensde variabelen.

Opgave 2.
Beschouw het volgende probleem, dat we het PRODUCTIE EN LEVERING PROBLEEM zullen noemen (afgekort tot PL). Een multinational beschikt over drie fabrieken. Deze fabrieken produceren een grondstof G; deze wordt verwerkt in de drie productiebedrijven die de multinational bezit tot snuisterijen 1 en 2. Deze rommel (= snuisterijen) wordt geleverd aan winkels $1, \ldots, n$.

De bedoeling is natuurlijk om zo goedkoop mogelijk de producten in de winkel te krijgen. De volgende gegevens zijn hierbij bekend:

- Iedere fabriek heeft een capaciteit die we Q_f $(f = 1, 2, 3)$ noemen.
- Iedere productiebedrijf heeft een capaciteit die we D_p $(p = 1, 2, 3)$ noemen. Het maakt niet uit wat er geproduceerd wordt maar in totaal kunnen er niet meer dan D_p snuisterijen worden geproduceerd.
- Om 1 eenheid snuisterij i $(i = 1, 2)$ te produceren, heb je een gegeven hoeveelheid s_i $(i = 1, 2)$ van grondstof G nodig.
- De transportkosten per eenheid bedragen $c_{f,p}$ van fabriek f $(f = 1, 2, 3)$ naar productiebedrijf p $(p = 1, 2, 3)$.
- De transportkosten per eenheid bedragen $d_{p,w}$ van productiebedrijf p $(p = 1, 2, 3)$ naar winkel w $(w = 1, \ldots, n)$.
- Winkel w $(w = 1, \ldots, n)$ bestelt $b_{w,i}$ stuks van snuisterij i $(i = 1, 2)$.
- Iedere winkel w $(w = 1, \ldots, n)$ moet volledig worden beleverd; het is mogelijk dat meer dan één productiebedrijf aan winkel w levert, en er mogen zelfs fractionele aantallen snuisterijen worden geleverd, zolang het totaal maar klopt.

Formuleer het PL-probleem als een (I)LP probleem.

Opgave 3
Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem dat zal worden opgelost met de simplex methode voor begrensde variabelen:

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrr}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & 9x_1 & - & 4x_2 & - & 15x_3 & + & 14x_4 & & \\
& \text{o.v.} & & & -71x_1 & + & 29x_2 & + & 114x_3 & - & 101x_4 & \leq & -440 \\
& & & & 3x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & \leq & 18 \\
& & & & -11x_1 & + & 4x_2 & + & 18x_3 & - & 15x_4 & \leq & -67 \\
& & & & 5x_1 & - & 2x_2 & - & 7x_3 & + & 9x_4 & \leq & 44 \\
& & & & & & 3 & \leq & x_1 & \leq & 9 & & \\
& & & & & & 2 & \leq & x_2 & \leq & 6 & & \\
& & & & & & 2 & \leq & x_3 & \leq & 6 & & \\
& & & & & & 1 & \leq & x_4 & \leq & 4 & &
\end{array}
$$

Voer spelingsvariabelen x_5, x_6, x_7 en x_8 in. Na een aantal iteraties is het volgende tableau gevonden:

		l	u		l	l		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$
0	0	1	−1	0	−8	−3	0	59
1	0	−2	1	0	4	1	0	5
0	0	1	−1	1	5	−6	0	4
0	1	−1	−1	0	11	3	0	3
0	0	1	1	0	2	1	1	3

De waarde van de doelstellingsfunctie kan worden verlaagd door x_4 te verlagen. Voer de bijbehorende iteratie uit en **stop dan, ongeacht of het optimum is gevonden**. Geef na afloop het punt dat correspondeert met het nieuwe tableau en de bijbehorende waarde; geef verder aan of dit punt optimaal is en waarom.

Opgave 4.
Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrr}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
& \text{o.v.} & & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 7 \\
& & & & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 29 \\
& & & & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 12 \\
& & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
& & & & & & & & x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

(a) Formuleer het duale probleem (D) van het bovenstaande lineair programmeringsprobleem (P). Gebruik duale variabelen w_1, w_2 en w_3.

(b) Het eerste gevolg van de zwakke dualiteitsstelling luidt: *wanneer $\hat{x}$ een toegelaten oplossing van (P) is en $\hat{w}$ is een toegelaten oplossing van (D) en hun uitkomstwaarden zijn gelijk, dan is $\hat{x}$ een optimale oplossing van (P) en $\hat{w}$ een optimale oplossing van (D).*

Bewijs de correctheid van de hierboven gemaakte bewering. U mag er hierbij vanuit gaan dat de zwakke dualiteitsstelling geldt.