Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college NS-101b werd in 2008/2009 gegeven door Dr. F.M.C. Witte.

Speciale relativiteitstheory (NS-101b)
7 november 2008

Dit tentamen omvat 3 opgaven met elk 3 onderdelen. Alle opgaven en alle onderdelen tellen even zwaar. Je mag je grafische rekenmachine & het meegeleverde formuleblad gebruiken.

Opgave 1: Van twee naar drie

Twee deeltjes met een massa $2m$ bewegen in het nul-impulsstelsel op elkaar af met een snelheid van $0.50c$ en botsen. Na de botsing wordt er 1 deeltje met een massa $2m$ waargenomen dat in rust is, terwijl er twee gelijke deeltjes met een onbekende massa M weg bewegen.

a) Laat zien dat de deeltjes met de onbekende massa M een gelijke maar tegengestelde impuls hebben.

b) In het laboratorium wordt de snelheid v waarmee de twee deeltjes met massa M uit elkaar bewegen gemeten. Bepaal een uitdrukking voor de onbekende massa M als functie van de gemeten snelheid v.

c) De gemeten waarde van v blijkt $0.75c$ te zijn. Bereken de bijbehorende M.

Opgave 2: Alice naar Alex

Alex is op dit moment 5 lichtjaar van de Aarde verwijderd (de huidige positie). Alice vertrekt op $t = 0$ en onderneemt een ruimtereis met een snelheid van $75.0 \times 10^{-2}c$ van de Zon naar Alex en Bob blijft in rust achter.

a) Bereken hoeveel jaar Alice volgens Bob onderweg is om Alex te bereiken en bereken hoeveel tijd er is verstreken in Alice's stelsel als zij Alex bereikt.

Stel nu dat Alex niet stilstond maar met een constante snelheid van $0.1c$ t.o.v. Bob in de richting van Bob beweegt. Op $t = 0$ was Alex 5 lichtjaar van Alice en Bob verwijderd.

b) Bereken de relatieve snelheid van Alex en Alice in het stelsel van Alice en bereken de afstand die Alice in haar stelsel af moet leggen tot ze Alex ontmoet.

Voor versnellende waarnemers lopen de dingen vaak anders. Een waarnemer die met een constante versnelling versneld beweegt over een wereldlijn die een ruimteachtige hyperbool is. Stel Alice versnelt constant, maar dat Alex nu ook met een constante versnelling van Bob weg beweegt. Neem aan dat de versnelling van Alex kleiner is dan die van Aliec.

c) Schets de wereldlijnen van Alice en Alex en laat zien dat die elkaar nooit zullen raken.

Opgave 3: Licht door een Bel

Bob neemt een bijzonder ijl quark-gluon plasma in rust waar, en het plasma is bezig weer gewone deeltjes te vormen terwijl er licht doorheen valt. Volgens Bob hebben de lichtdeeltjes een golflengte van 750 nm. Fotonen zijn massaloze deeltjes.

a) Beschouw een foton dat in de negatieve x-richting beweegt volgens Bob. Bereken de energie-impulsvector $\mathbf{p}$ van het deeltje en laat zien dat $\mathbf{p}^2 = 0$.

In Bob's stelsel verschijnt op $t = 0$ en $x = 0$ het middelpunt van een bel gewone "hadronische" materie, de events die liggen op de wanden van deze bel $\mathbf{x}_\mathrm{W}(t)$ voldoen aan de vergelijking

$$\mathbf{x}_\mathrm{W}(t)^2 = -R^2,$$

waarin R de onbekende straal van de bel is.

b) Bereken de snelheid van de belwand als een functie van t en R, in Bob's stelsel.

Beschouw nu een foton dat in botsing komt met de belwand. We nemen aan dat als de belwand het gluon absorbeert op tijdstip t dat dat foton en na een zeer korte tijd op $t+\tau$ weer uitgezonden wordt, en dat daarbij de frequentie van het gluon in het stelsel van de belwand onveranderd blijft.

c) Bereken op $t = 10^{-22}$ s de verhouding van de energie van het inkomende en het uitgestraalde foton in het stelsel van Bob voor de volgende twee gevallen:

   1. een gluon wordt gereflecteerd, en
   2. het gluon gaat door de belwand heen.

Formuleblad

Gamma en Beta

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{v}{c}\\ \gamma(v) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Tijdsdilatatie en Lengte-contractie

$$\begin{aligned}\delta t &= \gamma(v)\delta t_0\\ l &= \frac{1}{\gamma(v)}l_0\end{aligned}$$

Dopplereffect

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

"Optelling van snelheden"

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

Lorentz transformatie In de standaardnotatie

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(v)(x-\beta ct),\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ ct' &= \gamma(v)(ct-\beta x).\end{aligned}$$

In de hyperbolische notatie:

$$\begin{aligned}x' &= \cosh(\alpha)x-\sinh(\alpha)ct,\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ ct' &= \cosh(\alpha)ct-\sinh(\alpha)x.\end{aligned}$$

Spacetime vectors

Een orthonormale basis $\mathbf{e}_\mu$ in de ruimtetijd voldoet aan

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i &= -1, i=1,2,3\\ \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j &= 0, i\neq j\\ \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_0 &= 0, i=1,2,3\\ \mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_0 &= 1\end{aligned}$$

Een *event* kan worden weergegeven door een vector

$$\mathbf{X} = ct\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Onder de Lorentz-transofrmatie verandert het frame volgens

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= \gamma(v)(\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_0)\\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}'_0 &= \gamma(v)(\mathbf{e}_0+\beta\mathbf{e}_1)\end{aligned}$$

Golven worden beschreven door een golf-vector $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \frac{\omega}{c}\mathbf{e}_0 + k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 \\ k &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}\end{aligned}$$

m.b.v. de golfeigenschappen frequentie f en golflengte λ

$$\begin{aligned}k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega &= 2\pi f\end{aligned}$$

Voor lichtgolven of quantumgolven van massaloze deeltjes geldt

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \equiv 0$$

Kinematics
Laat $\mathbf{X}(\tau)$ een wereldlijn zijn en τ de eigentijd. Dan is de eigensnelheid $\mathbf{u}(\tau)$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\tau) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{X}(\tau) \\ &= \gamma(v)\{c\mathbf{e}_0 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3\} \\ v &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\end{aligned}$$

De relativistische impuls van een deeltje met rustmassa m is

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= m\mathbf{u} \\ &= \frac{E}{c}\mathbf{e}_0 + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

De relativistische energie-impuls van een quantum-golf $\mathbf{k}$ is

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

Invariante massa
Als $\mathbf{p}$ de totale energie-impulsvector van een systeem vrije deeltjes is, dan is de invariant massa M van dat systeem gegeven door $M^2c^2 = \mathbf{p}^2$.
Bellen Als R de ruststelselstraal van een bel aangeeft ten tijde van zijn ontstaan, dan voldoen de belwanden $\mathbf{x}_\mathrm{W}$ van een bel rond het centrum $\mathbf{x}_\mathrm{B}$ aan

$$(\mathbf{x}_\mathrm{B} - \mathbf{x}_\mathrm{W})^2 = -R^2.$$