Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-101b werd in 2005/2006 gegeven door Dr. F.M.C. Witte.

Speciale relativiteitstheorie (NS-101b)
9 november 2005

Opgave 1: Een deeltje in een lab

a) Als de levensduur van een instabiel deeltje A met rustmassa m in het lab precies N keer zo groot is als de levensduur in rust, wat is dan de snelheid van het deeltje?

b) Als deeltje A in rust vervalt in twee andere deeltjes B met elk een massa $\frac{m}{3}$, bereken dan de snelheid van elk van de deeltjes B.

c) Neem aan dat tenminste één van de deeltjes B beweegt in het lab in dezelfde richting als het deeltje A. Bereken de snelheden van beide deeltjes B in het lab.

Opgave 2: Stromend gas

In het lab ligt een buis langs de x-as. Daarin stroomt een gas met een door de experimentator in te stellen snelheid. Meestal kiest deze voor de snelheid van geluid, zo'n $300 m/s$ in de positieve x-richting. Door het gas beweegt een lichtstraal, met een in het lab gemeten frequentie ω, in de negatieve x-richting.

a) Als n de brekingsindex van het gas is, dan is de lichtsnelheid t.o.v. het gas gegeven door $\frac{c}{n}$. Leid een benaderde uitdrukking af voor de lichtsnelheid in het lab.

b) Wat is de frequentie van het licht gemeten in het ruststelsel van het gas?

c) Vaak hangt de brekingsindex van de frequentie van de golf af. Hierdoor treedt *dispersie* op. Stel dat gegeven is dat $n(\omega) = n_0 + c_1\omega$ voor een constante $c_1 \ll 1$. Kan c_1 bepaald worden uit een meting in het lab aan de snelheid van de lichtgolven in het gas? Beargumenteer je antwoord en maak een schatting van de grootte van het effect van c_1.

Opgave 3: Alice en Bob

Alice en Bob doen twee gedachtenexperimenten.
In het eerste experiment gaat Bob ervan uit dat hij in rust verkeert. Alice daarentegen wil proberen, startend vanuit rust, en natuurlijk enkel in gedachten, de "lichtbarrière" te doorbreken om vervolgens af te remmen en weer tot rust te komen. Bob voorspelt dat zij zichzelf daarbij zal kunnen zien.

a) Teken de hypothetische wereldlijn van Alice en laat zien dat Bob gelijk heeft.

b) Beschrijf in woorden, m.b.v. een schets van Alice's en Bob's wereldlijnen, hoe Alice Bob ziet gedurende haar hypothetische doorbraak door de lichtmuur.

In het tweede experiment spreken Alice en Bob af beide met dezelfde eigensnelheid

$$\mathbf{u}_{A/B}(\tau) = c\cosh\alpha\tau\mathbf{e}_0 + c\sinh\alpha\tau\mathbf{e}_1$$

in de x-richting te bewegen. Ze beginnen vanuit rust met een onderlinge afstand l_0.

c) Schets de wereldlijnen van Alice en Bob voor $\tau \geq 0$. Als Alice op haar eigentijdstip τ_1 Bob ziet, hoe laat is het dan op Bob's klok?

d) Verklaar in eigen woorden waarom Alice de indruk krijgt dat Bob zich niet aan de afspraak houdt.

Opgave 4: Electromagnetische effecten

Een electromagnetisch veld wordt beschreven door een lineaire afbeelding $\mathcal{F}$ die, werkende op de eigensnelheid $\mathbf{u}$ van een deeltje met lading q aanleiding geeft tot een kracht $q\mathcal{F}[mathbfu]$ op dat deeltje. Het deeltje beweegt volgens een waarnemer S, die een orthonormaal frame $\mathbf{e}_\mu$ gebruikt, op een zeker moment t_0 in de $\mathbf{e}_1$-richting met een snelheid v.

a) Geef de eigensnelheid $\mathbf{u}$ op het moment t_0 en bepaal het bijbehorende frame $\mathbf{e}'_\mu$ van het bewegende deeltje.

b) Stel dat de waarnemer S meet dat er alleen een electrisch veld E in de $\mathbf{e}_2$-richting op het deeltje werkt. Welke velden 'ziet' het deeltje in het eigenframe op t_0?

Formuleblad relativiteitstheorie

Gamma en Beta

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} \\ \gamma(v) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Tijdsdilatatie en Lengte-contractie

$$\begin{aligned} \delta t &= \gamma(v)\delta t_0 \\ l &= \frac{1}{\gamma(v)} l_0 \end{aligned}$$

Dopplereffect

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

"Addition theorem"

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

Lorentz transformation

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)(x-\beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(v)(ct-\beta x) \end{aligned}$$

Spacetime vectors

An orthonormal basis in spacetime satisfies

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i &= -1, i = 1,2,3 \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0, i \neq j \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_0 &= 0, i = 1,2,3 \\ \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1 \end{aligned}$$

An event is represented by

$$\vec{X} = ct\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Lorentz transformation on basisvectors

$$\begin{aligned} \vec{e}_1' &= \gamma(v)(\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_0) \\ \vec{e}_2' &= \mathbf{e}_2 \\ \vec{e}_3' &= \mathbf{e}_3 \\ \vec{e}_0' &= \gamma(v)(\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1) \end{aligned}$$

Wave-vectors $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{\omega}{c}\mathbf{e}_0 + k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 \\ k &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \end{aligned}$$

Wave-properties, frequency, and wavelength

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\
\omega &= 2\pi f
\end{aligned}
$$

Lightwaves or quantum-waves of massless particles

$$
\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \equiv 0
$$

Kinematics
$\mathbf{X}(\tau)$ denotes a worldline and τ the proper time. Then proper velocity $\mathbf{u}(\tau)$ is

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(\tau) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{X}(\tau) \\
&= \gamma(v)\{c\mathbf{e}_0 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3\} \\
v &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}
\end{aligned}
$$

Relativistic energy-momentum of a particle with restmass m

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p} &= m\mathbf{u} \\
&= \frac{E}{c}\mathbf{e}_0 + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

Relativistic momentum as 3d-vector

$$
\vec{p} = m = \gamma(v)\vec{v}
$$

Relativistic energy as 3d "scalar"

$$
E = \gamma(v)mc^2
$$

Relativistic energy-momentum of a particle described by the quantumwave $\mathbf{k}$

$$
\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}
$$

Proper acceleration

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}(\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{u}(\tau) \\
\mathbf{a}(\tau)\cdot\mathbf{u}(\tau) &= 0
\end{aligned}
$$

Dynamics
Force and acceleration as 3d-vectors $\vec{f}$ and $\vec{a}$

$$
\begin{aligned}
\vec{f}_\perp &= m\gamma(v)\vec{a}_\perp \\
\vec{f}_{//} &= m\gamma(v)^3\vec{a}_{//}
\end{aligned}
$$

Interactions $\mathcal{F}$ and the proper velocity $\mathbf{u}$ of a particle with a charge q

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{p}(\tau) = q\mathcal{F}[\mathbf{u}(\tau)]
$$

and the "Electric" and "magnetic" components in S of $\mathcal{F}$

$$
\begin{aligned}
B_1 &\equiv \mathcal{F}[\mathbf{e}_2]\cdot\mathbf{e}_3 \\
B_2 &\equiv \mathcal{F}[\mathbf{e}_3]\cdot\mathbf{e}_1 \\
B_3 &\equiv \mathcal{F}[\mathbf{e}_1]\cdot\mathbf{e}_2 \\
E_j &\equiv \mathcal{F}[\mathbf{e}_j]\cdot\mathbf{e}_0
\end{aligned}
$$