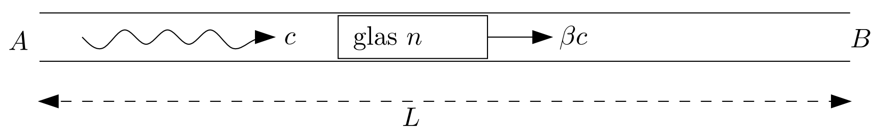
Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{T}\!\mathcal{BC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-101b werd in 2003/2004 gegeven door dr. G.A.P. Engelbertink.

Relativiteitstheorie (NS-101b)
10 november 2003

Opgave 1

Tussen de punten A en B van een lange vacuümbuis beweegt een cilinder van glas met eigenlengte d_0 en brekingsindex n (waarbij $n \geq 1$). De afstand tussen A en B is L en de snelheid van de cilinder is βc. Een lichtsignaal vertrekt vanuit A, doorkruist de bewegende glascilinder en arriveert in B. De snelheid van het licht in *glas in rust* bedraagt $\frac{c}{n}$. In het stelsel S van de vacuümbuis geven we de reistijd voor het licht van A naar B aan met T.



a) Hoe groot is T voor $n = 1$?
Hoe groot is T voor $\beta = 0$?

Antwoord:

$n = 1$ dan $T = \dfrac{L}{c}$,

$\beta = 0$ dan $T = \frac{L-d_0}{c} + \frac{d_0}{\frac{c}{n}} = \frac{L}{c} + \frac{d_0}{c}(n-1)$.

In stelsel S vertrekt op een zeker tijdstip $t_A > 0$ vanuit de oorsprong $A(x_A = 0)$ het lichtsignaal, dat de achterkant van de bewegende glascilinder treft op tijdstip t_{in}, ter plaatse x_{in}, en enige tijd later de bewegende cilinder aan de voorkant verlaat op tijdstip t_{uit}, ter plaatse x_{uit}. Het lichtsignaal arriveert op tijdstip t_B in punt B met $x_B = L$. De situatie is zodanig dat $t_{\text{uit}} < t_B$.

We willen de reistijd $T = t_B - t_A$ van het lichtsignaal bepalen, uitgedrukt in L, c, d_0, n en β.
Het stelsel S' is het ruststelsel van de glascilinder, met de achterkant van de cilinder als oorsprong van S'. De oorsprongen van S' en S passeren elkaar op $t' = 0 = t$.
In stelsel S' gaat het lichtsignaal de cilinder binnen op t'_{in}, ter plaatse $x'_{\text{in}} = 0$, en verlaat het de cilinder op t'_{uit}, ter plaatse $x'_{\text{uit}} = d_0$

b) Bepaal zonder rekenwerk de grootte van ($t'_{\text{uit}} - t'$in) in stelsel S'. **Antwoord**: $t'_{\text{uit}} - t'_{\text{in}} = \dfrac{nd_0}{c}$.

c) Geef via Lorentztransformaties uitdrukkingen voor $x_{\text{in}}, t_{\text{in}}$ en $x_{\text{uit}}, t_{\text{uit}}$ om aan te tonen dat

$$t_{\text{uit}} - t_{\text{in}} = \frac{nd_0}{c}\gamma\left(1 + \frac{\beta}{n}\right).$$

Antwoord:

$$\begin{aligned}
x_{\text{in}} &= \gamma(x'_{\text{in}} + vt'_{\text{in}}) = \gamma vt'_{\text{uit}} \\
t_{\text{in}} &= \gamma(t'_{\text{in}} + \frac{v}{c^2}x'_{\text{in}}) = \gamma t'_{\text{in}} \text{ zodat natuurlijk } x_{\text{in}} = vt_{\text{in}}\text{; ook is } t'_{\text{in}} \text{ een eigentijd} \\
x_{\text{uit}} &= \gamma(x'_{\text{uit}} + vt'_{\text{uit}}) = \gamma d_0 + \gamma vt'_{\text{uit}} \\
t_{\text{uit}} &= \gamma(t'_{\text{uit}} + \frac{v}{c^2}x'_{\text{uit}}) = \gamma vt'_{\text{uit}} + \gamma\beta\frac{1}{c}d_0
\end{aligned}$$

zodat $t_{\rm uit} - t_{\rm in} = \gamma(t'_{\rm uit} - t'_{\rm in}) + \gamma\beta\dfrac{d_0}{c} = \gamma\dfrac{1}{c}nd_0 + \gamma\beta\dfrac{1}{c}d_0 = \dfrac{nd_0}{c}\gamma\left(1+\dfrac{\beta}{n}\right)$.

d) Bepaal de grootheid

$$\frac{x_{\rm uit} - x_{\rm in}}{t_{\rm uit} - t_{\rm in}},$$

i.e. in S de snelheid van het licht in de bewegende glascilinder. Verifieer dit resultaat met de relativistische som van $\frac{c}{n}$ en βc.

Antwoord:

$x_{\rm uit} - x_{\rm in} = \gamma d_0 + \gamma v(t'_{\rm uit} - t'_{\rm in}) = \gamma d_0 + \gamma v\frac{nd_0}{c} = \gamma d_0(1+\beta n)$

zodat

$$\begin{aligned}
\frac{x_{\rm uit} - x_{\rm in}}{t_{\rm uit} - t_{\rm in}} &= c\left(\frac{1+\beta n}{n+\beta}\right), \\
v_{\rm som} &= \frac{\frac{c}{n}+\beta c}{1+\frac{1}{c^2}\,\frac{c}{n}\beta c} = c\left(\frac{\frac{1}{n}+\beta}{1+\frac{\beta}{n}}\right) = c\left(\frac{1+\beta n}{n+\beta}\right)
\end{aligned}$$

e) Leid tenslotte af dat de reistijd T gegeven wordt door

$$T = \frac{L}{c} + (n-1)\frac{d_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Antwoord:

$$\begin{aligned}
T = t_B - t_A &= \frac{1}{c}(x_{\rm in} - x_A) + (t_{\rm uit} - t_{\rm in}) + \frac{1}{c}(x_B - x_{\rm uit}) \\
&= \frac{1}{c}(x_{-}x_A) + \frac{1}{c}(x_{\rm uit} - x_{\rm in}) + (t_{\rm uit} - t_{\rm in}) \\
&= \frac{L}{c} - \frac{\gamma d_0}{c}(1+\beta n) + \frac{\gamma d_0}{c}(n+\beta) \\
&= \frac{L}{c} - \frac{\gamma d_0}{c}(n+\beta-1-\beta n) \\
&= \frac{L}{c} - \frac{\gamma d_0}{c}\{(n-1)-\beta(n-1)\} \\
&= \frac{L}{c} - \frac{\gamma d_0}{c}(n-1)(1-\beta) \\
&= \frac{L}{c} + (n-1)\frac{d_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.
\end{aligned}$$

Opgave 2. Totale energie in nul-impuls stelsel

In het laboratoriumstelsel S botst het deeltje met massa m_1 en energie E_1 met het stilstaande deeltje met massa m_2.

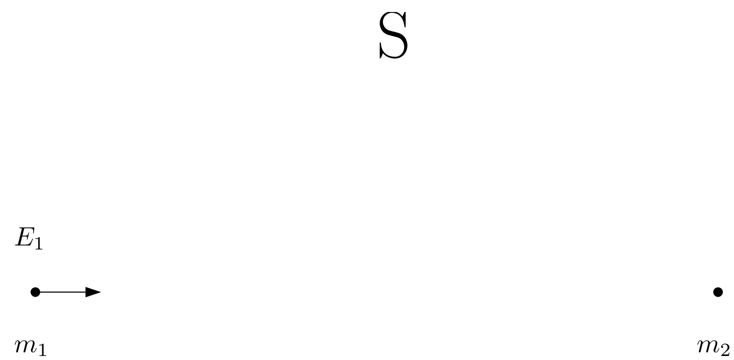
Bij deze botsing wordt (eventueel willekeurig kortstondig) het complex met massa M gevormd, dat dan met snelheid $\beta_M c$ in dezelfde richting als m_1 beweegt.

a) Bereken de massa M en de snelheid $\beta_M c$ van dit complex, uitgedrukt in m_1, m_2 en E_1 (of γ_1 en β_1).

[Aanwijzing: $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ en $pc = \beta E$]

Antwoord:

Energiebehoud: $E_1 + m_2c^2 = E_M = \sqrt{(Mc^2)^2 + (p_Mc)^2}$



Impulsbehoud: $p_M c = p_1 c = \sqrt{E_1^2 - (m_1 c^2)^2}$; substitutie in de energievergelijking geeft dan

$$(E_1 + m_2 c^2)^2 = (Mc^2)^2 + E_1^2 - (m_1 c^2)^2$$

$$(Mc^2)^2 = E_1^2 + (m_2 c^2)^2 + 2E_1 m_2 c^2 - E_1^2 + (m_1 c^2)^2$$

$$M = \left[m_1^2 + m_2^2 + 2\frac{E_1}{c^2} m_2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(m_1 + m_2)^2 + 2(\gamma_1 - 1) m_1 m_2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta_M = \frac{p_M c}{E_M} = \frac{p_1 c}{E_1 + m_2 c^2} = \frac{\sqrt{E_1^2 - (m_1 c^2)^2}}{E_1 + m_2 c^2} = \frac{\beta_1 E_1}{E_1 + m_2 c^2} = \beta_1 \left(\frac{\gamma_1 m_1}{\gamma_1 m_1 + m_2}\right) = \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 1}}{\gamma_1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

(Met E_1 gegeven zijn ook γ_1 en β_1 berekend.

b) Bovenstaande botsing beschouwen we nu in het **nul-impuls** stelsel S*.

Beantwoord nu met behulp van a), zonder rekenwerk (maar *met* toelichting) de volgende vier vragen.

1. Hoe groot is de snelheid van S* t.o.v. S?
   Antwoord: β_M
2. Hoe groot is in S* de totale energie van het systeem?
   Antwoord: Mc^2
3. Zijn m_1 en m_2 in S en S* wel hetzelfde?
   Antwoord: m_1 en m_2 zijn invariant.
4. Is de waarde van "de totale energie in S*" Lorentz-invariant?
   Antwoord: Mc^2 is invariant omdat M invariant is.

c) Hoe groot zijn in S* de snelheid en de energie van m_2, uitgedrukt in m_1, m_2 en E_1?

Antwoord:

$v_2^* = \beta_M c$ en

$$\begin{aligned} E_2^* &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_M^2}} m_2 c^2 \\ &= \frac{(E_1 + m_2 c^2) m_2 c^2}{\sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2}} \\ &= \frac{(\gamma_1 m_1 m_2 + m_2^2) c^2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2}} \\ &= m_2 c^2 \frac{(\gamma_1 m_1 + m_2)}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2}} \end{aligned}$$