IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE NS-101B WERD IN 2006/2007 GEGEVEN DOOR DR. F.M.C. WITTE.

Speciale relativiteitstheorie (NS-101b)
8 november 2006

Opgave 1 Een deeltje in een lab

a) Als de de levensduur van een instabiel deeltje A met rustmassa $m = 10^{-31}kg$ in het lab precies N keer zo groot is als levensduur in rust, geef een uitdrukking voor de snelheid v van het deeltje t.o.v. het lab?

b) In het ruststelsel van deeltje A vervalt het in een andere deeltje B met een massa $\frac{1}{3}m$ en een massaloos deeltje. Bereken dan de snelheid, in het ruststelsel van A, van de deeltje B en ook de energie van het massaloze deeltje?

c) Aangenomen deeltje B beweegt in het lab in dezelfde richting als het deeltje A. Bereken de snelheid van het deeltje B in het lab.

Opgave 2 Botsend glas

In het lab ligt een glazen buisje met een rust-lengte van $2cm$ langs de $\vec{e}_1$-richting dat beweegt in de lengte-richting met een snelheid van $3000m/s$. Het glas wordt, tegen de bewegingsrichting in, getroffen door een lichtstraal bestaande uit vele fotonen met een golfengte, in het lab, van 550 nanometer.

a) Wat is de energie van de fotonen gemeten in het ruststelsel van het glas?

   Als n de brekingsindex van het glas is dan is de lichtsnelheid t.o.v. het glas gegeven door $c_n = \frac{c}{n}$. Als een lichtgolf door glas gereflecteerd of gebroken wordt dan blijft de frequentie ω van het licht onveranderd maar het golfgetal k veranderd in k'.

b) Leg uit waarom voor de lichtgolf in het glas $k' = \frac{\omega}{c_n}$ en de golfvector $\vec{k}$ dus niet meer voldoet aan $\vec{k}^2 = 0$.

   Als de fotonen op het grensvlak van het glas aankomen gaan ze in feit een “botsing” aan met het glas. Stel dat er N fotonen op het glas treffen, dat er N_r gereflecteerd worden en N_t gewoon het glas in vliegen.

c) Wat is, in het ruststelsel van de buis, de totale energie-impuls voor de botsing en de totale energie-impuls er na?

d) Laat zien dat behoud van energie betekent dat $N = N_r + N_t$.

e) Bepaal $\frac{N_r}{N_t}$ uit het behoud van impuls en controleer of het resultaat natuurkundig redelijk is voor $n = 1$.

Opgave 3 Bubble-surfing met Alice en Bob

Alice en Bob doen opnieuw een gedachten experiment. Bob gaat er vanuit, zoals gewoonlijk, dat hij in rust verkeerd. Kort voor $t = 0$ op Bob’s klok creert hij een bel die met $0.5c$ in de richting van Alice beweegt. Alice wil proberen, startend vanuit rust, te surfen op de belwand van de expanderende bel. Alice staat op $t = 0$ in $x = R$ als haar surfboard gegrepen wordt door een belwand die precies daar ontstaat. Het rust stelsel van de bel bewoog op dat moment met een snelheid van $0.5c$.

a) Teken vanuit Bob’s frame de situatie en geef aan waar beide belwanden zijn als Alice geraakt wordt.

b) Is er een R waarvoor het mogelijk is dat de andere wand Bob raakt?

c) Kan Bob een boodschap versturen naar Alice met behulp van de belwand?

Opgave 4 Bellen botsen in het vroege Heelal

In het vroege Heelal zijn hoogstwaarschijnlijk fase-overgangen voorgekomen die verliepen via de vorming van expanderende belletjes van nieuwe fase. Neem aan dat de ruimtetijd inmiddels haar gewone vlakke vorm heeft aangenomen als er zo'n fase-overgang optreedt.

a) Stel dat op $t = 0$ een bel met een straal van $10^{-15}m$ verschijnt, en rond $x = 0.5m$, en op $t = 0.510^{-10}s$ een tweede bel met een zelfde straal, beide in rust in het lab-stelsel.

b) Teken de situatie op en geef de vergelijking die geldt voor de belwanden na hun ontstaan en schets de evolutie van de belwanden voor $t > 0$.

c) Bereken het tijdstip waarop er twee belwanden botsen.

Formuleblad relativiteitstheorie

Gamma en Beta

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{v}{c}\\ \gamma(v) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Tijdsdilatatie en Lengte-contractie

$$\begin{aligned}\delta t &= \gamma(v)\delta t_0\\ l &= \frac{1}{\gamma(v)} l_0\end{aligned}$$

Dopplereffect

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

"Addition theorem"

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

Lorentz transformation

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(v)(x-\beta ct)\\ y' &= y\\ z' &= z\\ ct' &= \gamma(v)(ct-\beta x)\end{aligned}$$

Spacetime vectors

An orthonormal basis in spacetime satisfies

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i &= -1, i=1,2,3\\ \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j &= 0, i\neq j\\ \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_0 &= 0, i=1,2,3\\ \mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_0 &= 1\end{aligned}$$

An event is represented by

$$\vec{X} = ct\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Lorentz transformation on basisvectors

$$\begin{aligned}\vec{e}_1' &= \gamma(v)(\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_0)\\ \vec{e}_2' &= \mathbf{e}_2\\ \vec{e}_3' &= \mathbf{e}_3\\ \vec{e}_0' &= \gamma(v)(\mathbf{e}_0+\beta\mathbf{e}_1)\end{aligned}$$

Wave-vectors $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \frac{\omega}{c}\mathbf{e}_0 + k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3\\ k &= \sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\end{aligned}$$

Wave-properties, frequency, and wavelength

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\
\omega &= 2\pi f
\end{aligned}
$$

Lightwaves or quantum-waves of massless particles

$$
\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \equiv 0
$$

Kinematics
$\mathbf{X}(\tau)$ denotes a worldline and τ the proper time. Then proper velocity $\mathbf{u}(\tau)$ is

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(\tau) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{X}(\tau) \\
&= \gamma(v)\{c\mathbf{e}_0 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3\} \\
v &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}
\end{aligned}
$$

Relativistic energy-momentum of a particle with restmass m

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p} &= m\mathbf{u} \\
&= \frac{E}{c}\mathbf{e}_0 + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

Relativistic momentum as 3d-vector

$$
\vec{p} = m = \gamma(v)\vec{v}
$$

Relativistic energy as 3d "scalar"

$$
E = \gamma(v)mc^2
$$

Relativistic energy-momentum of a particle described by the quantumwave $\mathbf{k}$

$$
\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}
$$

Proper acceleration

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}(\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{u}(\tau) \\
\mathbf{a}(\tau)\cdot\mathbf{u}(\tau) &= 0
\end{aligned}
$$

Dynamics
Force and acceleration as 3d-vectors $\vec{f}$ and $\vec{a}$

$$
\begin{aligned}
\vec{f}_\perp &= m\gamma(v)\vec{a}_\perp \\
\vec{f}_{//} &= m\gamma(v)^3\vec{a}_{//}
\end{aligned}
$$

Interactions $\mathcal{F}$ and the proper velocity $\mathbf{u}$ of a particle with a charge q

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{p}(\tau) = q\mathcal{F}[\mathbf{u}(\tau)]
$$

and the "Electric" and "magnetic" components in S of $\mathcal{F}$

$$
\begin{aligned}
B_1 &\equiv \mathcal{F}[\mathbf{e}_2]\cdot\mathbf{e}_3 \\
B_2 &\equiv \mathcal{F}[\mathbf{e}_3]\cdot\mathbf{e}_1 \\
B_3 &\equiv \mathcal{F}[\mathbf{e}_1]\cdot\mathbf{e}_2 \\
E_j &\equiv \mathcal{F}[\mathbf{e}_j]\cdot\mathbf{e}_0
\end{aligned}
$$