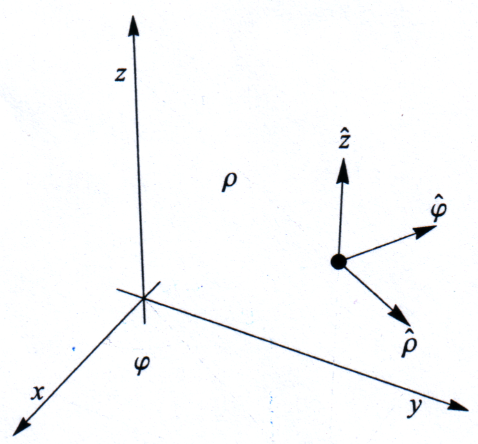
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-103B werd in 2008-2009 gegeven door Dr. E. R. Savelsbergh.

Elektromagnetisme (NS-103B)
30 juni 2009

De gegevens mogen zonder bewijs gebruikt worden. Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe. Het gebruik van literatuur of rekenmachine is niet toegestaan.

Gegevens

- Elektrische veld van puntlading q: $\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$
- Wet van Gauss: $\oint \overrightarrow{E} \cdot \mathtt{d}\overrightarrow{A} = \frac{Q_{omvat}}{\epsilon_0}$
- Als een puntlading q zich in een elektrisch veld $\overrightarrow{E}$ bevindt, geldt voor de elektrische kracht $\overrightarrow{F}_{el}$ op de puntlading: $\overrightarrow{F}_{el} = q\overrightarrow{E}$
- Als een elementje $\mathrm{d}\overrightarrow{l}$ van een stroomkring die een stroom I voert zich in een magnetisch veld $\overrightarrow{B}$ bevindt, geldt voor de magnetische kracht $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{mag}$ op het elementje: $\mathtt{d}\overrightarrow{F}_{mag} = I\mathtt{d}\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B}$
- Wet van Ohm: $V = IR$
- Wet van Faraday: de geïnduceerde spanning $\mathcal{E}$ in een gesloten kring is gelijk aan de afname van de magnetische flux door een oppervlak dat de kring als rand heeft: $\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \overrightarrow{B} \cdot \mathtt{d}\overrightarrow{A}$
- Wet van Lenz: de geïnduceerde spanning $\mathcal{E}$ wekt een inductiestroom op die de fluxverandering tegenwerkt
- Definitie van cilindercoördinaten (ρ, ϕ, z), en bijbehorende eenheidsvectoren $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ en $\hat{z}$ (zie figuur 1).



Figuur 1: cilindercoördinaten

Opgave 1. Een uniform geladen rechte lijn

Beschouw een uniforme lijnlading op de z-as, met lijnladingsdichtheid λ. We voeren zoals gebruikelijk cilindercoördinaten (ρ, ϕ, z) in (zie gegevens).

a) Beargumenteer op grond van symmetrie-overwegingen dat geldt voor de richting en de grootte van het elektrische veld van de ladingsverdeling:

1. De richting van het veld is radieel (alleen een ρ-component, geen z-component of ϕ-component).
2. De grootte van het veld hangt *niet* af van z en ook *niet van* ϕ.

Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

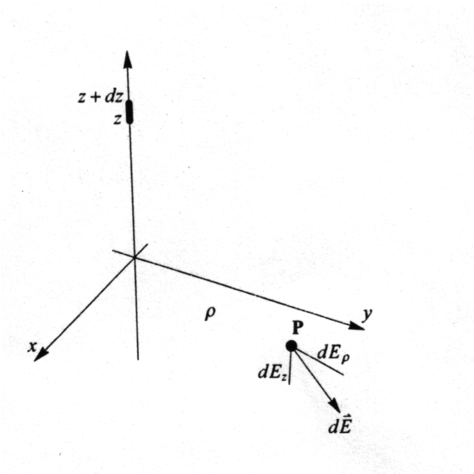
Voor het elektrische veld van de uniform geladen lijn geldt:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho}$$

We gaan dit resultaat op twee manieren afleiden:

- met Coulomb-integratie;
- met de wet van Gauss.

We beginnen met de eerste methode. Daartoe beschouwen we een punt P in het vlak $z = 0$ (het xy-vlak), op een afstand ρ tot de draad. In figuur is $\mathrm{d}\vec{E}$ de bijdrage aan het elektrische veld P van het stuk van de draad tussen x en $z + dz$, met $\mathrm{d}\vec{E}_\rho$ de radiële componenent $\mathrm{d}\vec{E}_z$ de z-component. *(10 punten)*



b) Toon aan dat geldt:

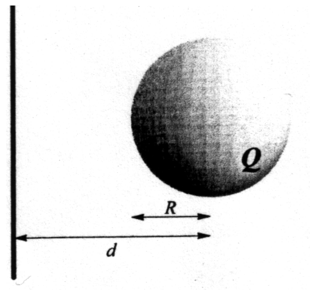
$$\mathrm{d}\vec{E}_\rho = \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}dz$$

(6 punten)

c) Bepaal de veldsterkte in een punt op afstand ρ van de draad door integratie over de landingsverdelin, van $z = -L$ naar $z = +L$, met $L \to \infty$.
Gegeven: een primitieve (naar u) van $\frac{1}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\frac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}$. *(6 punten)*

d) Bepaal ook met behulp van de wet van Gauss de veldsterkte in een punt op afstand ρ van de draad. *(6 punten)*

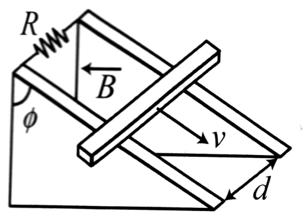
We beschouwen tenslotte het geval dat we behalve met de uniform geladen lijn ook te maken hebben met een uniform geladen bolschil. De straal van de schil is R en de totale lading op de schil is Q. Het middelpunt van de schil bevindt zich op een afstand d van de lijnlading. Deze afstand is groter dan de straal van de schil ($d > R$), zodat de lijn de bolschil niet doorsnijdt.



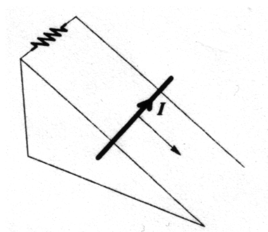
e) Bepaal de grootte en de richting van de totale kracht die de lijnlading uitoefent op de bolschil. Gegeven: het elektrische veld van een uniform geladen bolschil is buiten de bolschil gelijk aan dat van een puntlading in het centrum van de schil, met dezelfde lading als die van de gehele bolschil.
Hint: de kracht kan zonder verder rekenwerk bepaald worden door handig gebruik te maken van de derde wet van Newton: actie = - reactie. *(8 punten)*

Opgave 2. Een bewegende staaf in een magnetisch veld

Beschouw een geledende staaf die langs twee geleidende wiggen kan bewegen.



Figuur 2:



Figuur 3:

De afstand tussen de wiggen bedraagt d (zie figuur 2). Het bovenoppervlak van de wiggen, waarover de staaf beweegt, maakt een hoek ϕ met de verticaal. Bovenaan zijn de wiggen onderling verbonden via een weerstand R. De staaf en de wiggen veronderstellen we weerstandsloos. Het geheel bevindt zich in een constant en uniform magnetisch veld. Het magnetische veld wijst *horizontaal* naar links, en de grootte ervan bedraagt B.
We beschouwen eerst het geval dat de staaf handmatig langs de wiggen omlaag bewogen wordt, met constante snelheid v. Daarbij blijft de staaf steeds horizontaal georiënteerd. Ten gevolge van deze beweging wordt een inductiestroom I opgewekt.

a) Toon aan dat in de aangegeven richting de inductiestroom gegeven wordt door (onder verwaarlozing van zelfinductie-elementen - zie figuur 3):

$$I = \frac{vdB\cos\phi}{R}$$

(10 punten)

b) Terwijl de stroom I door de staaf loopt, wordt er een magnetische kracht op uitgeoefend.

   1. Toon aan dat de grootte van de magnetische kracht op de staaf gegeven wordt door (onder verwaarlozing van het magnetische veld ten gevolge van de inductiestroom):

$$F_{mag} = IdB$$

2. Geef ook de richting van de kracht aan.

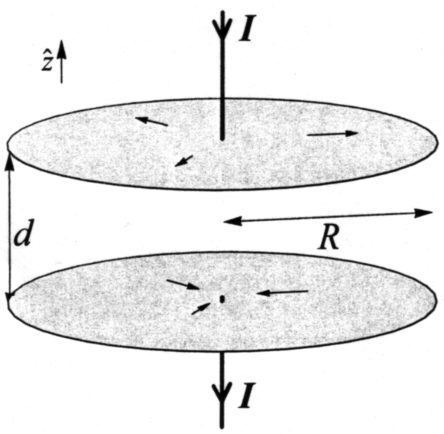
We beschouwen nu het geval dat de staaf aan zichzelf overgelaten wordt. De staaf, met massa m, begint dan naar beneden te glijden onder invloed van de zwaartekracht mg (met g de valversnelling). We nemen aan dat er geen wrijving is tussen de staaf en de wiggen en dat de staaf steeds horizontaal georiënteerd blijft.

c) Er ontstaat uiteindelijk een evenwichtssituatie waarbij de staat met constante snelheid naar beneden glijdt. De helling is daartoe voldoende lang. *(7 punten)*

1. Leg kwalitatief uit waarom er uiteindelijk een evenwichtssituatie ontstaat waarbij de staaf met constante snelheid naar beneden glijdt.
2. Bepaal de grootte van de snelheid die de staaf bereikt in de evenwichtssituatie, uitgedrukt in m, g, B, d, R en ϕ.

Opgave 3. Een opladende condensator

In deze opgave beschouwen we een condensator die bestaat uit twee parallelle ronde platen, met straal R, op onderlinge afstand d. Elk van de condensatorplaten is in het middelpunt verbonden met een stroomdraad. De stroomdraden staan loodrecht op de platen. Beide stroomdraden voeren in de



aangegeven richting een *constante* stroom I. Hierdoor wordt de condensator opgeladen. Op tijdstip $t = 0$ begint het oplaadproced. Op tijdstip $t > 0$ is de totale lading op de bovenste plaat dus It en de totale lading op de onderste plaat $-It$.
Hoewel dit niet helemaal realistisch is, nemen we aan dat de lading op de condensatorplaten steeds uniform verdeeld is. Op de platen is dan sprake van een constante, maar niet uniforme, radiële oppervlaktestroom.

a) Beschouw op de bovenste plaat een cirkel met straal ρ, concentrisch met het middelpunt van de plaat. Toon aan dat de hoeveelheid lading die per seconde door die cirkel gaat gegeven wordt door: *(6 punten)*

$$\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) I$$

We willen het magnetische veld bepalen ten gevolge van de stroomverdeling bestaande uit de constante stroom in de stroomdraden (die we oneindig lang denken) en de constante radiële stroom in de condensatorplaten. We kiezen de z-as door de draden, en voeren zoals gebruikelijk cilindercoördinaten (ρ, ϕ, z) in (zie gegevens).

b) Beargumenteer op grond van symmetrie-overwegingen dat geldt voor de richting en de grootte van het magnetisch veld van de stroomverdeling: *(8 punten)*

1. De richting van het veld is tangentieel (alleen een ϕ-component, geen z-component of ρ-component).
2. De grootte van het veld hangt *niet* af van ϕ.

Let op: u hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden, maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

Om de grootte van het magnetische veld te bepalen, maken we gebruik van de gegeneraliseerde wet van Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathtt{d}\vec{l} = \mu_0 \left(I_{\mathtt{omvat}} + \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{E} \cdot \mathtt{d}\vec{A} \right)$$

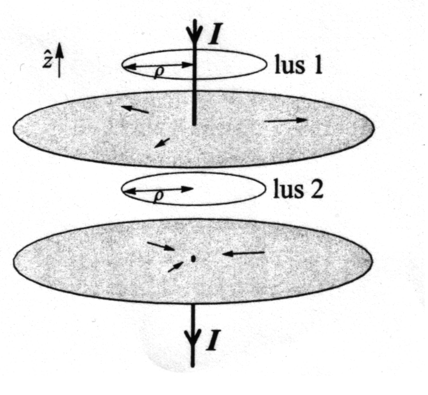
We moeten gebruik maken van de *gegeneraliseerde* wet van Ampère, omdat er ten gevolge van het vullen van de condensator sprake is van een veranderd elektrisch veld. De tweede term in het rechterlid hoeft dus niet nul te zijn. We gaan nu eerst over tot de bepaling van het veranderende elektrische veld. Onder de genoemde aannames is dit op ieder tijdstip het veld behorend bij twee uniform geladen platen met tegengestelde totale lading. Indien we randeffecten verwaarlozen, geldt voor het elektrische veld ten gevolge van een *enkele* uniform geladen plaat, met oppervlakteladingsdichtheid σ, die zich bevindt in een vlak $z = 0$ (het xy-vlak):

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & \mathtt{voor} z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & \mathtt{voor} z < 0 \end{cases}$$

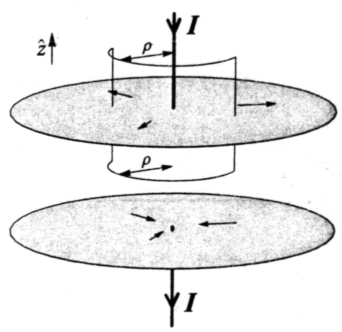
c) Toon aan dat geldt voor het veranderende elektrische veld van de opladende condensator (onder verwaarlozing van randeffecten): *(4 punten)*

$$\vec{E}(t) = \begin{cases} -\frac{It}{\pi\epsilon_0 R^2}\hat{z} & \mathtt{tussen\ de\ platen} \\ \vec{0} & \mathtt{boven\ en\ onder\ de\ platen} \end{cases}$$

We gaan nu over tot de bepaling van de grootte van het magnetische veld. Daarbij maken we gebruik van de gegeneraliseerde wet van Ampère en geschikte Ampèrelussen. We nemen weer aan dat we randeffecten buiten beschouwing kunnen laten.



Figuur 4: opgave d



Figuur 5: opgave e

d) Toon met behulp van de gegeneraliseerde wet van Ampère aan dat geldt voor de grootte van het magnetische veld boven de platen:

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

Neem als Ampèrelus een cirkel met straal ρ om de z-as, boven de platen (zie Ampèrelus in figuur 4). *(4 punten)*

e) Toon met behulp van de gegeneraliseerde wet an Ampère aan dat geldt voor de grootte van het magnetische veld tussen de platen:

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2}$$

Neem als Ampèrelus een cirkel met straal ρ om de z-as, tussen de platen (zie Ampèrelus 2 in figuur 4). *(4 punten)*

Uiteraard moet de gegeneraliseerde wet van Ampère gelden voor elke Ampèrelus. We nemen nu eem Ampèrelus bestaande uit twee *halve* cirkels om de z-as, de ene boven de platen en de andere tussen de platen, waarbij de uiteinden verbonen zijn door rechte lijnstukken parallel aan de z-as (zie figuur 5).

f) Ga voor de aangegeven Ampèrelus expliciet na dat aan de gegeneraliseerde wet van Ampère is voldaan. *(8 punten)*