Tentamen *Elektromagnetisme* (NS-103B)

woensdag 20 april 2011

15:00–18:00 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van onderstaande algemene gegevens gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Verder krijgt u 10 punten cadeau.

SUCCES!

Algemene gegevens

$$\vec{F}^{\,\mathrm{el}}_{Q,\vec{R}\to q,\vec{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R}\,)}{|\vec{r}-\vec{R}\,|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntladingen)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{mag}}_{P,\vec{R}\to p,\vec{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R}\,)}{|\vec{r}-\vec{R}\,|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntpolen)}$$

$$\oint \vec{E}\,(\vec{r}\,)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}O = \frac{Q_{\mathrm{omvat}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(wet van Gauss)}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}\times(\vec{r}_0-\vec{r}\,)}{|\vec{r}_0-\vec{r}\,|^3} \qquad \text{(wet van Biot-Savart)}$$

$$\oint \vec{B}(\vec{r}\,)\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0\,I_{\mathrm{omvat}} \qquad \text{(wet van Ampère)}$$

$$\vec{E}^{\,Q,\vec{R}}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R}\,)}{|\vec{r}-\vec{R}\,|^3} \qquad \text{(veld puntlading)}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{op}\ q\ \mathrm{in}\ \vec{r}} = q\,\vec{E}\,(\vec{r}\,) \qquad \text{(kracht op puntlading in extern veld)}$$

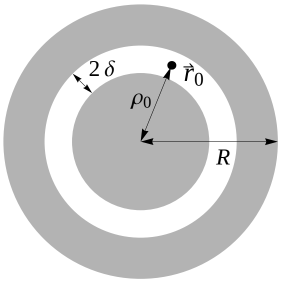
- Voor een twee-dimensionale magneet met een oppervlakte*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\mu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door een oppervlakte*pool*verdeling met dichtheid $-\vec{\nabla}\cdot\vec{\mu}$ en een lijn*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\mu}\cdot\hat{n}$.

1 Een geladen cilinder

a: 15 b: 10 c: 5 (totaal: 30)

Het elektrische veld in een homogeen geladen cilinder

Beschouw een zeer lange cilinder van isolerend materiaal (geen geleider!). De cilinder heeft straal R en voor het gemak denken we de cilinder oneindig lang. We kiezen het coördinatensysteem zodanig dat de z-as samenvalt met de as van de cilinder. De cilinder is homogeen geladen, met volumeladingsdichtheid τ_0.
We gaan allereerst het elektrische veld bepalen in een punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in het inwendige van de cilinder. Er geldt dus $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < R$. Om het elektrische veld te bepalen maken we gebruik van de volgende limietprocedure.



- Snijd een (oneindig lange) cilinderschil weg om het punt $\vec{r}_0$, van $\rho_0 - \delta$ tot $\rho_0 + \delta$. In de figuur is de resulterende situatie in dwarsdoorsnede weergegeven.
- Bepaal het elektrische veld $\vec{E}^{\,\delta}$ van de resterende ladingsverdeling in het punt $\vec{r}_0$.
- Neem de limiet $\delta \downarrow 0$.

a. Toon met symmetrie-argumenten en de wet van Gauss aan dat geldt:

$$\vec{E}^{\,\delta}(\vec{r}_0) \;=\; \frac{\tau_0\,(\rho_0 - \delta)^2}{2\epsilon_0\,\rho_0}\,\hat{\rho}_0$$

$\hat{\rho}_0$ is de loodrecht van de z-as af gerichte eenheidsvector bij $\vec{r}_0$: $\hat{\rho}_0 = \dfrac{1}{\rho_0}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

Door de limiet $\delta \downarrow 0$ te nemen zien we dat het elektrische veld in het inwendige van de cilinder zelf gegeven wordt door: $\dfrac{\tau_0 \rho}{2\epsilon_0}\,\hat{\rho}$. Verder blijkt het elektrische veld *buiten* de cilinder gegeven te worden door: $\dfrac{\tau_0 R^2}{2\epsilon_0 \rho}\,\hat{\rho}$.
Samengevat geldt voor het elektrische veld $\vec{E}^{\,\mathrm{hc}}$ van de homogeen geladen cilinder:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{hc}}(\vec{r}) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\tau_0\,\rho}{2\epsilon_0}\,\hat{\rho} & \text{voor } \rho < R \\[2ex] \dfrac{\tau_0 R^2}{2\epsilon_0\,\rho}\,\hat{\rho} & \text{voor } \rho > R \end{cases}$$

Hiervan mag u in het vervolg gebruik maken.

Een potentiaal van de homogeen geladen cilinder

Een potentiaal behorend bij dit elektrische veld wordt gegeven door:

$$V^{\mathrm{hc}}(\vec{r}) \;=\; -\int_{l(\vec{0}\to\vec{r})} \vec{E}^{\,\mathrm{hc}}(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,'$$

De lijnintegratie loopt vanaf de oorsprong $\vec{0}$ tot aan het punt $\vec{r}$ waar de potentiaal berekend wordt.

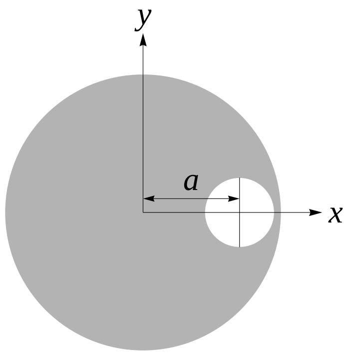
b. Bepaal door geschikte integratiepaden te kiezen een expliciete uitdrukking van deze potentiaal:

   (i) voor een willekeurig punt *binnen* de cilinder;

   (ii) voor een willekeurig punt *buiten* de cilinder.

Een cilinder met een cilindrische holte

Beschouw nu een cilinder met een cilindrische holte. De as van de holte is evenwijdig aan de z-as, en bevindt zich op een afstand a van de z-as. In de figuur is de situatie in dwarsdoorsnede weergegeven.



c. Toon aan dat het elektrische veld *in de holte* homogeen is en gericht is langs de x-as:

$$\vec{E}^{\,\text{holte}} = \frac{\tau_0 a}{2\epsilon_0}\,\hat{x}$$

<u>Hint</u>: Vat de cilinder met holte op als de combinatie van twee massieve cilinders, waarvan de ene een volumeladingsladingsdichtheid τ_0 heeft en de andere een volumeladingsdichtheid $-\tau_0$.

2 Een puntlading bij een geleidende bol

a: 5 b: 10 c: 10 (totaal: 25)

Deze opgave gaat uiteindelijk over een geleidende bol waar een puntlading in de buurt gehouden wordt. Eerst volgen echter enkele gegevens waarvan u gebruik mag maken.

Een homogeen geladen boloppervlak Als een totale lading Q gelijkmatig verdeeld is over een boloppervlak met straal R en middelpunt in de oorsprong, dan heerst er geen elektrisch veld binnen het boloppervlak en is het veld buiten het oppervlak hetzelfde als het veld van een puntlading Q in de oorsprong.
Er geldt dus voor het elektrische veld $\vec{E}^{\,\text{hb}}$ van het homogeen geladen boloppervlak:

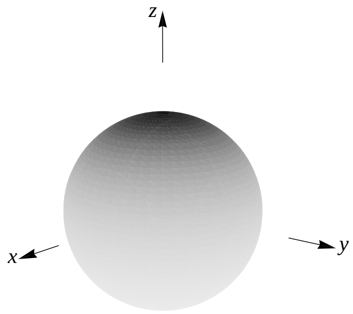
$$\vec{E}^{\,\text{hb}} = \begin{cases} \vec{0} & \text{binnen het boloppervlak} \\ \\ \vec{E}^{\,Q,\vec{0}} & \text{buiten het boloppervlak} \end{cases}$$

Een inhomogeen geladen boloppervlak Beschouw nu een inhomogene ladingsverdeling op een boloppervlak met straal R en middelpunt in de oorsprong:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{(1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

De oppervlakteladingsdichtheid hangt alleen af van de hoek ϑ met de positieve z-as. Verder is σ_0 een constante met de dimensie van oppervlakteladingsdichtheid; α is een dimensieloze parameter waarvoor geldt: $0 < \alpha < 1$.

In de figuur is de ladingsverdeling weergegeven voor een bepaalde waarde van σ_0 en α. De zwartingsgraad is daarbij een maat voor de ladingsdichtheid: hoe donkerder, hoe groter de ladingsdichtheid. Bij de “noordpool” ($\vartheta = 0$) is de ladingsdichtheid het grootst; bij de “zuidpool” ($\vartheta = \pi$) het kleinst.



Hoewel de ladingsverdeling tamelijk complex is, is het bijbehorende veld vrij eenvoudig:

- *Binnen* het boloppervlak is het elektrische veld hetzelfde als het veld van een puntlading $Q_1 = \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{\alpha(1-\alpha^2)}$ in het punt $\vec{R}_1 = \left(0, 0, \frac{R}{\alpha}\right)$. Daar $0 < \alpha < 1$, ligt $\vec{R}_1$ buiten het boloppervlak.
- *Buiten* het boloppervlak is het elektrische veld hetzelfde als het veld van een puntlading $Q_2 = \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{(1-\alpha^2)}$ in het punt $\vec{R}_2 = (0, 0, \alpha R)$. Daar $0 < \alpha < 1$, ligt $\vec{R}_2$ binnen het boloppervlak.

Er geldt dus voor het elektrische veld $\vec{E}^{\,\mathrm{ib}}$ van het inhomogeen geladen boloppervlak:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{ib}} = \begin{cases} \vec{E}^{\,Q_1,\vec{R}_1} & \text{binnen het boloppervlak} \\ \qquad Q_1 = \frac{4\pi R^2\sigma_0}{\alpha(1-\alpha^2)} & \\ \qquad \vec{R}_1 = \left(0,0,\frac{R}{\alpha}\right) & \\ & \\ \vec{E}^{\,Q_2,\vec{R}_2} & \text{buiten het boloppervlak} \\ \qquad Q_2 = \frac{4\pi R^2\sigma_0}{(1-\alpha^2)} & \\ \qquad \vec{R}_2 = (0,0,\alpha R) & \end{cases}$$

$$\boxed{\text{In deze opgave mag u van voorgaande gegevens gebruik maken.}}$$

De totale lading op het inhomogeen geladen boloppervlak

Veronderstel dat een hoeveelheid lading verdeeld is over een boloppervlak volgens de oppervlakteladingsdichtheid:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

De lading die zich dan in totaal op het boloppervlak bevindt is op twee manieren te bepalen:

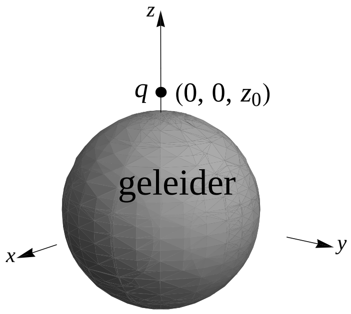
- door integratie van de dichtheid over het boloppervlak;
- met behulp van de wet van Gauss en de gegeven eigenschappen van het elektrische veld van de ladingsverdeling.

a. Toon op één van deze manieren aan dat geldt voor de totale lading Q op het boloppervlak:

$$Q = \frac{4\pi R^2\sigma_0}{(1-\alpha^2)}$$

Een puntlading bij een geleidende bol

Beschouw een *neutrale* geleidende massieve bol (de totale lading op de bol is 0). Buiten de bol wordt een puntlading q aangebracht in de positie $(0, 0, z_0)$, waarbij dus $z_0 > R$. De puntlading wordt op die plek vastgehouden. Door de aanwezigheid van de puntlading gaat de vrije lading in de geleidende bol zich herverdelen, totdat een statische evenwichtssituatie is ontstaan.



b. Leg uit dat in de statische evenwichtssituatie geldt dat de ladingsverdeling de *combinatie* is van de volgende twee verdelingen:

(i) Een inhomogene ladingsverdeling over de rand van de bol met oppervlakteladingsdichtheid:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{(1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{waarbij:} \quad \alpha = \tfrac{R}{z_0}, \qquad \sigma_0 = -\alpha\left\{1-\alpha^2\right\}\tfrac{q}{4\pi R^2}$$

(ii) Een gelijkmatige verdeling van een totale hoeveelheid lading $\frac{R}{z_0}q$ over de rand van de bol.

<u>Opmerking</u>: In uw uitleg mag u gebruiken dat de ladingsverdeling waarbij evenwicht optreedt uniek is.

Kracht van de puntlading op de geleidende bol

c. Toon aan dat geldt voor de kracht die de puntlading in de evenwichtssituatie uitoefent op de geleidende bol:

$$F_{q\to\text{bol}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{R}{z_0}\left\{\frac{1}{(z_0-\frac{R^2}{z_0})^2} - \frac{1}{z_0^2}\right\}\hat{z}$$

3 Berekening van magnetische velden

a: 5 b: 10 c: 15 d: 5 (totaal: 35)

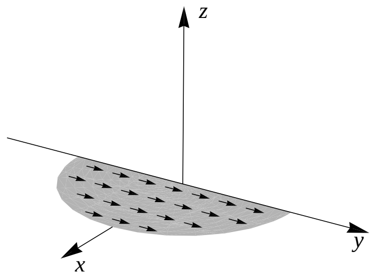
Indien nodig mag u in deze opgave gebruik maken van de volgende gegevens.

functie	$\sin x \cos x$	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$
primitieve	$\frac{1}{2}\sin^2 x$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x$	$\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

Een magnetische halfschijf

Een dunne platte magneet in de vorm van een halve schijf (straal R) is homogeen gemagnetiseerd. Als we het coördinatensysteem kiezen zoals aangegeven in de figuur, geldt voor de oppervlaktedipooldichtheid (μ is een constante):

$$\vec{\mu}(x,y) \;=\; \mu\,\hat{y}$$



a. Ga na dat de equivalente poolverdeling van de halve magneetschijf een lijnpoolverdeling is over de halve cirkel $\left\{(R\cos\varphi, R\sin\varphi)\,,\ \text{met} -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$, waarvan de dichtheid gegeven wordt door: $\mu\sin\varphi$.

b. Toon aan geldt voor het magnetische veld $\vec{B}^{\,\mathrm{hs}}$ van de halve schijf:

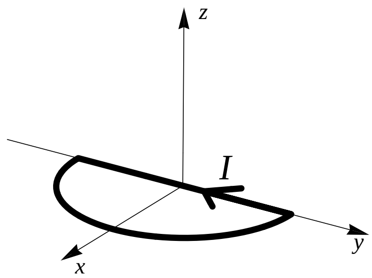
$$\vec{B}^{\,\mathrm{hs}}(0,0,z) \;=\; -\frac{\mu_0\,\mu\,R^2}{8\,(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{y}$$

Een stroomkring

Beschouw nu een stroomdraad bestaande uit een halve cirkel (straal R) verbonden door een rechte lijn. De draad voert een stroom I zoals aangegeven in de figuur.

c. Toon aan, met behulp van de wet van Biot-Savart, dat geldt voor het magnetische veld $\vec{B}^{\,\mathrm{sk}}$ van deze stroomkring:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{sk}}(0,0,z) \;=\; \frac{\mu_0\,I\,R^2}{4\pi\,\{R^2+z^2\}^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -\frac{2R}{z} \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$$



Een andere magnetisatie van de halfschijf

Het magnetische veld van de in de y-richting gemagnetiseerde halve schijf is wezenlijk verschillend van het magnetische veld van de stroomkring. Er bestaat echter een magnetisatie van de dunne platte halve schijf die (buiten de magneet) *wel* hetzelfde magnetische veld geeft als de stroomkring.

d. Beschrijf de magnetisatie van de halve schijf die hetzelfde magnetische veld geeft als de stroomkring. Maak eventueel een verhelderende tekening.
Opmerking: U hoeft *niet* expliciet aan te tonen dat de door u beschreven magnetisatie inderdaad aanleiding geeft tot hetzelfde magnetische veld als de stroomkring. Een beschrijving van de magnetisatie volstaat.