a.imhof@uu.nl

Hertentamen *Elektromagnetisme* (NS-103B)

maandag 4 juli 2011

14:00–17:00 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van onderstaande algemene gegevens gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Verder krijgt u 10 punten cadeau.

SUCCES!

Algemene gegevens

$$\vec{F}^{\,\mathrm{el}}_{Q,\vec{R}\to q,\vec{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}$$ (wet van Coulomb voor puntladingen)

$$\vec{F}^{\,\mathrm{mag}}_{P,\vec{R}\to p,\vec{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}$$ (wet van Coulomb voor puntpolen)

$$\oint \vec{E}\,(\vec{r})\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}O = \frac{Q_{\mathrm{omvat}}}{\epsilon_0}$$ (wet van Gauss)

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}\times(\vec{r}_0-\vec{r})}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3}$$ (wet van Biot-Savart)

$$\oint \vec{B}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0\,I_{\mathrm{omvat}}$$ (wet van Ampère)

$$\vec{E}^{\,Q,\vec{R}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}$$ (veld puntlading)

$$\vec{F}_{\mathrm{op}\ q\ \mathrm{in}\ \vec{r}} = q\,\vec{E}\,(\vec{r})$$ (kracht op puntlading in extern veld)

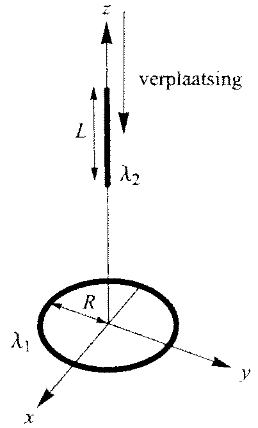
$$V^{Q,\vec{R}}_{\infty}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\,|\vec{r}-\vec{R}|}$$ (potentiaal t.o.v. oneindig puntlading)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$ (relatie elektrisch veld en potentiaal)

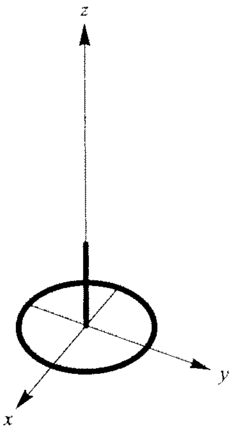
1 Een geladen staafje en een geladen ring

a: 5 b: 10 c: 5 d: 10 e: 10 (totaal: 40)

In deze opgave beschouwen we een geladen ring met straal R en een geladen staafje met lengte L. Over beide voorwerpen is en blijft de lading gelijkmatig verdeeld. De ring en het staafje zijn zo dun dat ze goed beschreven kunnen worden met een lijnladingsdichtheid. De lijnladingsdichtheid van de ring is λ_1, die van het staafje λ_2 (λ_1 en λ_2 zijn constanten).



Het staafje wordt langs de z-as verplaatst.



De eindsituatie na de verplaatsing.

Het staafje wordt van zeer ver weg ($z = +\infty$) langs de z-as verplaatst totdat het zich uiteindelijk bevindt tussen $z = 0$ en $z = L$. De arbeid W die verricht moet worden bij deze verplaatsing blijkt gegeven te worden door:

$$W = \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{L}{R} + \sqrt{1 + \frac{L^2}{R^2}}\right) \tag{1}$$

In deze opgave gaat u deze arbeid op twee verschillende manieren berekenen. Bij deze berekeningen mag u van het volgende gegeven gebruik maken:

functie	primitieve (naar x)
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$

Manier 1: via een potentiaal van de ring

a. Toon aan dat geldt voor de potentiaal ten opzichte van oneindig van de hele ring (door eerst de bijdragen van kleine stukjes van de ring te bepalen):

$$V_\infty^{\mathrm{ri}}(0,0,z) = \frac{\lambda_1 R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \tag{2}$$

Volgens de fysische interpretatie van de potentiaal ten opzichte van oneindig geldt voor de arbeid die verricht moet worden om een puntlading q te verplaatsen in het veld van de ringlading, van heel ver weg naar positie $\vec{r}$, langs een pad buiten de ringlading:

$$q\, V_\infty^{\mathrm{ri}}(\vec{r})$$

b. Toon met behulp van deze interpretatie aan dat de arbeid W die verricht moet worden om het staafje te verplaatsen langs de z-as, van zeer ver weg totdat het zich uiteindelijk bevindt tussen $z = 0$ en $z = L$, gegeven wordt door (1).

2

Manier 2: via de kracht van de ring op het staafje

Bij de tweede manier om de arbeid W te berekenen bepalen we eerst de elektrische kracht die de ring op het staafje uitoefent. De arbeid die deze kracht levert bij de verplaatsing van het staafje is immers tegengesteld aan de arbeid die wij moeten verrichten bij de verplaatsing.
Om de elektrische kracht van de ring op het staafje te bepalen, bepalen we als tussenstap eerst het elektrische veld van de ring. Daar het staafje zich altijd op de z-as bevindt, kunnen we ons beperken tot de bepaling van het elektrische veld van de ring op de z-as. Dit elektrische veld kan op twee manieren bepaald worden:

- Uit de potentiaal ten opzichte van oneindig (2), in combinatie met een symmetrie-argument.
- Via een bepaling van de bijdragen aan het veld van kleine stukjes van de ring.

c. Toon op één van deze manieren aan dat geldt voor het elektrische veld van de ring op de z-as:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{ri}}(0,0,z) = \frac{\lambda_1 R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{z}$$

d. Toon aan dat geldt voor de kracht van de ring op het staafje, wanneer het staafje zich bevindt tussen $z = z_0$ en $z = z_0 + L$:

$$\vec{F}_{\mathrm{ri}\rightarrow\mathrm{st}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(z_0+L)^2}} \right) \hat{z} \qquad (3)$$

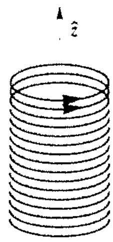
e. Toon tenslotte met behulp van (3) aan dat de arbeid W die verricht moet worden om het staafje te verplaatsen langs de z-as, van zeer ver weg totdat het zich uiteindelijk bevindt tussen $z = 0$ en $z = L$, gegeven wordt door (1).

2 Stroomspoelen

a: 10 b: 5 c: 15 (totaal: 30)

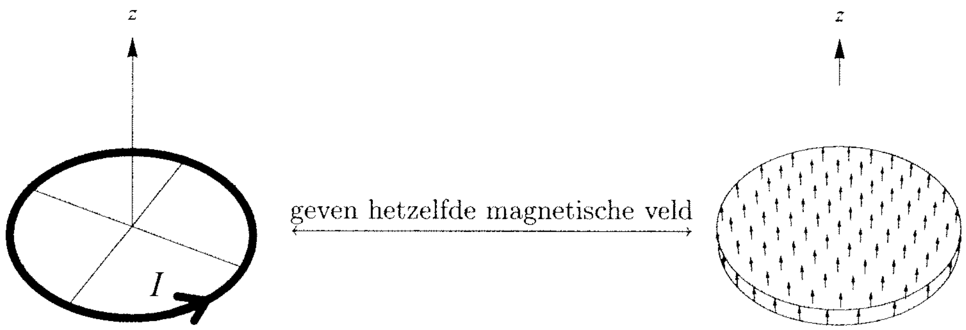
Het magnetische veld buiten een oneindig lange rechte stroomspoel

Een oneindig lange rechte cilindrische stroomspoel (straal R) bestaat uit n windingen per meter en voert in de aangegeven richting een stroom I. De windingen liggen zo dicht opeen (n is zo groot) dat de spoel opgevat kan worden als n losse cirkelvormige stroomkringen per meter. Zoals bekend is het magnetische veld van zo'n spoel in het gebied buiten de spoel nul:



$$\vec{B}^{\,\text{buiten}} = \vec{0}$$

We gaan dit resultaat nu aantonen met gebruikmaking van het equivalentieprincipe van Ampère. Volgens dit principe geeft een dunne platte magneet die homogeen en loodrecht op het vlak gemagnetiseerd is buiten de magneet hetzelfde veld als een stroomkring in de vorm van de rand van de magneet.



kring met stroom I

oppervlakteverdeling van magnetische dipolen, met dichtheid $\vec{\mu} = I\hat{z}$

De omloopszin van de stroom is via de rechterhandregel gerelateerd aan de richting van de oppervlaktedipooldichtheid.

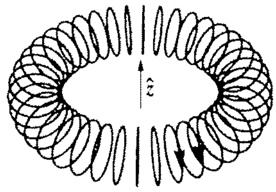
a. Beschouw een oneindig lange cilindermagneet (straal R), waarvan de volumedipooldichtheid gegeven wordt door:

$$\vec{\nu} = n\,I\,\hat{z} \tag{4}$$

Leg met behulp van het equivalentieprincipe van Ampère uit dat het magnetische veld van deze magneet in het gebied buiten de cilinder hetzelfde is als dat van de oneindig lange rechte stroomspoel met stroom I en n windingen per meter.

b. Leg uit dat in het gebied buiten de cilinder het magnetische veld van de oneindig lange cilindermagneet nul is (en volgens onderdeel a) dus ook het veld van de oneindig lange rechte stroomspoel).
Gegeven: Voor een drie-dimensionale magneet met een volume*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\nu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door een volume*pool*verdeling met dichtheid $-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nu}$ en een oppervlakte*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\nu}\cdot\hat{n}$.

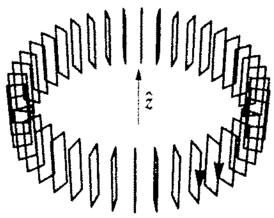
Het magnetische veld van een toroïde-achtige stroomspoel



Een stroomspoel in de vorm van een torus bestaat uit s windingen per radiaal en voert in de aangegeven richting een stroom I. De windingen liggen zo dicht opeen (s is zo groot) dat de spoel opgevat kan worden als s losse cirkelvormige stroomkringen per radiaal. Zoals bekend geldt voor het magnetische veld van zo'n spoel:

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\, s\, I}{\rho}\,\hat{\varphi} & \text{binnen de spoel} \\ \vec{0} & \text{buiten de spoel} \end{cases} \tag{5}$$

Hierbij is ρ de afstand tot de z-as en $\hat{\varphi}$ de eenheidsvector in de φ-richting.



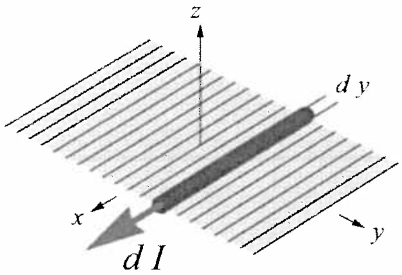
Beschouw nu een toroïde-achtige stroomvoerende spoel waarvan de windingen *rechthoekig* zijn.

c. Ga na, met gebruikmaking van symmetrie-overwegingen en de wet van Ampère, in hoeverre het resultaat (5) ook geldt voor het magnetische veld van de toroïde-achtige spoel met *rechthoekige* windingen.
Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

3 Magnetisch veld van een stroomvlak

a: 5 b: 10 c: 5 (totaal: 20)

Deze opgave betreft een manier om een homogeen magnetisch veld te genereren. Beschouw een zeer groot en plat stuk aluminiumfolie. Het folie voert in een bepaalde richting een elektrische stroom. Die stroom is homogeen verdeeld over het folie. In dat geval heerst op niet al te grote afstand van het folie, zowel erboven als eronder, in goede benadering een homogeen magnetisch veld. Voor het ideale geval dat het stroomvlak oneindig groot is, geldt dit zelfs exact.



Beschouw het geval dat het folie zich uitstrekt over het hele xy-vlak en dat de stroom in de positieve x-richting loopt. Deel het stroomvlak op in smalle stroken (breedte $\mathrm{d}y$). Elke strook kunnen we dan opvatten als een oneindig lange stroomdraad (van $x = -\infty$ tot $x = +\infty$) waardoor in de positieve x-richting een stroom $\mathrm{d}I$ loopt. In de figuur is dit voor één van de stroken weergegeven. Voor de stroomsterkte $\mathrm{d}I$ in elk van de stroken geldt:

$$\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}y$$

Hierbij is J de stroomsterkte per eenheid van breedte. J is een constante (voor alle stroken hetzelfde) daar de stroom homogeen verdeeld is over het vlak.

a. Leg met een simpel symmetrie-argument uit dat het magnetische veld *van het hele stroomvlak* alleen een y-component heeft.

Noem nu $\mathrm{d}\vec{B}$ de bijdrage aan het magnetische veld van de strook tussen y en $y + \mathrm{d}y$.

b. Toon met behulp van de wet van Biot-Savart aan dat de y-component van $\mathrm{d}\vec{B}$ gegeven wordt door de integraaluitdrukking:

$$\mathrm{d}B_y(x_0, y_0, z_0) = -\frac{\mu_0 J z_0}{4\pi}\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

Evaluatie van de integraal over x geeft:

$$\mathrm{d}B_y(x_0, y_0, z_0) = -\frac{\mu_0 J z_0}{2\pi\left\{(y-y_0)^2 + z_0^2\right\}}\,\mathrm{d}y \qquad (6)$$

c. Toon met behulp van (6), het superpositiebeginsel en onderstaande gegevens aan dat het magnetische veld $\vec{B}^{\,\mathrm{vlak}}$ van het hele stroomvlak zowel boven het vlak als onder het vlak homogeen is:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{vlak}}(x_0, y_0, z_0) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J}{2}\,\hat{y} & \text{voor } z_0 > 0 \\ \frac{\mu_0 J}{2}\,\hat{y} & \text{voor } z_0 < 0 \end{cases}$$

<u>Gegevens:</u>

- Een primitieve (naar u) van $\frac{1}{u^2+a^2}$ wordt gegeven door: $\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$.