Elektromagnetisme 1 – Herkansing

4 juli 2011

1a Voor een puntlading in $\vec{r}_0$ geldt:

$$dV_\infty^{ri}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_0|} \qquad \text{met} \qquad \vec{r} = (0,0,z)$$

Als we de ring parametriseren door:

$$\vec{r}_0 = (R\cos\varphi,\ R\sin\varphi, 0)$$

dan is een ladingselementje

$$dq = \lambda_1 |d\vec{r}_0| = \lambda_1 R\, d\varphi\ .$$

Zo vinden we:

$$dV_\infty^{ri}(0,0,z) = \frac{\lambda_1 R\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(0-R\cos\varphi)^2+(0-R\sin\varphi)^2+(z-0)^2}}$$

$$= \frac{\lambda_1 R\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

Integreren over φ van 0 tot 2π geeft direkt

$$V_\infty^{ri}(0,0,z) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_1 R\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$= \frac{\lambda_1 R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

b Deel nu het staafje op in puntladingen $dq = \lambda_2 dz$ die zich bevinden tussen $z=0$ en $z=L$. Voor het stukje dat zich (in de eindsituatie) bevindt in $(0,0,z)$ was de benodigde arbeid:

$$dW = \lambda_2 dz\ V_\infty^{ri}(0,0,z)$$

De totale benodigde arbeid is dan:

$$W = \int_0^L \lambda_2 V_\infty^{ri}(0,0,z)\, dz$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 R}{2\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 R}{2\varepsilon_0}\left[\ln\left(z+\sqrt{R^2+z^2}\right)\right]_0^L$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 R}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L}{R}+\sqrt{1+\left(\frac{L}{R}\right)^2}\right)$$

c) Eerste manier:

Het veld wordt gegeven door: $\vec{E}^{ri} = -\vec{\nabla} V_\infty^{ri}$

Dit veld moet rotatiesymmetrie rond de z-as bezitten en kan dus alleen // z-as staan. (Alt: xz-vlak en yz-vlak zijn symmetrievlakken, dus $\vec{E}^{ri}$ moet parallel aan hun snijlijn staan: de z-as.):

$$\vec{E}^{ri}(0,0,z) = E^{ri}(0,0,z)\,\hat{z}$$

Het nemen van de gradiënt beperkt zich nu tot de afgeleide naar z.

$$\vec{E}^{ri}(0,0,z) = -\left(\frac{dV_{ri}^\infty}{dz}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{\lambda_1 R z}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}$$

Tweede manier:

Met de parametrisatie van opgave (1a):

$$d\vec{E}^{ri}(0,0,z) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \quad \text{met} \quad dq = \lambda_1 R\,d\varphi$$

$$\vec{r}_0 = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$$

$$\vec{r} = (0,0,z)$$

$$= \frac{\lambda_1 R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(-R\cos\varphi, -R\sin\varphi, z)}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,d\varphi$$

Na integratie over φ van 0 tot 2π:

$$E_x^{ri} = E_y^{ri} = 0 \quad \text{en} \quad E_z^{ri} = \frac{\lambda_1 R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

d) Deel ook nu weer het staafje op in stukjes dz op (0,0,z) die een lading $\lambda_2 dz$ hebben. De kracht op zo'n stukje is:

$$d\vec{F}_{ri\to st} = \lambda_2 \vec{E}^{ri}(0,0,z)\,dz$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 R}{2\varepsilon_0}\,\hat{z}\,\frac{z\,dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Dit moeten we integreren van z_0 tot z_0+L:

$$\vec{F}_{ri\to st} = \frac{\lambda_1\lambda_2 R}{2\varepsilon_0}\,\hat{z}\int_{z_0}^{z_0+L}\frac{z\,dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

= (vervolgd)

$$\vec{F}_{ri\to st} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0} \hat{z} \left[\frac{-1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right]_{z_0}^{z_0+L}$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(z_0+L)^2}} \right) \hat{z}$$

e) Het staafje wordt verplaatst van $z_0 = \infty$ naar $z_0 = 0$. Een klein stukje verplaatsing is dus $-dz_0 \cdot \hat{z}$ en de bijbehorende arbeid

$$dW = - \vec{F}_{ri\to st} \cdot \hat{z} \, dz_0$$

Integreren:

$$W = - \int_\infty^0 \vec{F}_{ri\to st} \cdot \hat{z} \, dz_0$$

$$= - \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0} \int_\infty^0 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(z_0+L)^2}} \right) dz_0$$

$$= - \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0} \left(\left[\ln\left(z_0 + \sqrt{z_0^2+R^2}\right) - \ln\left(z_0+L+\sqrt{(z_0+L)^2+R^2}\right) \right]_\infty^0 \right)$$

$$= - \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0} \left[\ln\left(\frac{z_0 + \sqrt{z_0^2+R^2}}{z_0+L+\sqrt{(z_0+L)^2+R^2}} \right) \right]_\infty^0$$

$$= - \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{L+\sqrt{L^2+R^2}} \right)$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{L}{R} + \sqrt{1+\left(\frac{L}{R}\right)^2} \right)$$

2a) We kunnen de cilindermagneet opgebouwd denk uit vele dunne plakjes dz, met elk een oppervlakte-dipool dichtheid $d\vec{\mu} = \vec{\nu}\, dz$. Voor elk plakje geldt het equivalentie-principe van Ampère. Het veld ervan is dus hetzelfde als van een "plakje spoel" met $n\,dz$ wikkelingen. Het superpositiebeginsel garandeert dus dat het veld van de magneet met magnetisatie $\vec{\nu} = \frac{d\vec{\mu}}{dz}$ hetzelfde is als van een spoel met stroom I en n wikkelingen, mits $\vec{\nu} = In\,\hat{z}$.

b) De cilindermagneet heeft een equivalente poolverdeling die bestaat uit:

- een volumepooldichtheid van $-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nu} = 0$
- een oppervlaktepooldichtheid van $\vec{\nu}\cdot\hat{n}$ op de randen

De laatste is dus nul op de cilindermantel, $\vec{\nu}\cdot\hat{n} = nI$ op het bovenvlak en $\vec{\nu}\cdot\hat{n} = -nI$ op het ondervlak van de cilinder. Dit geeft hetzelfde veld als van twee tegengesteld geladen parallelle platen met straal R. Maar de platen bevinden zich nu op oneindige afstand van elkaar. In deze limiet nadert het veld dus naar nul

c) * Elk vlak dat de z-as bevat is een spiegelvlak van de stroomverdeling. Omdat bij spiegeling het magneetveld anti-symmetrisch is geldt voor punten in het spiegelvlak dat $\vec{B} \perp$ op dit vlak moet staan: $\boxed{\vec{B} = B(\rho,\varphi,z)\,\hat{\varphi}}$

* Maar $\vec{B}$ kan niet afhangen van φ omdat er ook rotatiesymmetrie rond de z-as is: $\boxed{\vec{B} = B(\rho,z)\,\hat{\varphi}}$

Kies nu een cirkelvormig pad in een vlak $\perp$ z-as. De straal ρ en hoogte z zijn willekeurig. Het pad wordt beschreven door $d\vec{r} = \rho\, d\varphi \cdot \hat{\varphi}$. Pas de wet v. Ampère toe:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} B(\rho,z)\,\hat{\varphi}\cdot\rho\hat{\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \rho B(\rho,z)\, d\varphi = 2\pi\rho B(\rho,z)$$

Anderzijds moet dit gelijk zijn aan μ_0 maal de omvatte stroom. Dit is $2\pi s I$ als het pad door de wikkeling loopt en anders nul. Conclusie:

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 s I}{\rho}\,\hat{\varphi} & \text{binnen de spoel} \\ 0 & \text{buiten de spoel} \end{cases}$$

3a) Omdat het stroomvlak oneindig uitgebreid is, is elk vlak parallel aan het xz-vlak een symmetrievlak. Het magneetveld moet hier loodrecht op staan, ofwel in de y-richting.

b) Biot-Savart: $d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$ met $d\vec{r} = \hat{x}\,dx$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{r} = (x, y, 0)$

$dI = J\,dy$

Eerst het uitprodukt:

$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & 0 & 0 \\ x_0 - x & y_0 - y & z_0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}\cdot(0) - \hat{y}\,(z_0 dx) + \hat{z}\cdot(y_0 - y)dx$$

$$= (-z_0\hat{y} + (y_0 - y)\hat{z})dx$$

Dan substitueren in B-S. Alleen de y-component is nodig:

$$dB_y(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 J dy}{4\pi} \cdot \frac{-z_0 dx}{\{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0\}^{3/2}}$$

Tenslotte integreren over x:

$$dB_y(\vec{r}_0) = -\frac{\mu_0 J dy}{4\pi} z_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2\}^{3/2}}$$

c) Superpositie van alle stroken komt neer op integratie van (6) over y:

$$B_y(\vec{r}_0) = -\frac{\mu_0 J z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\{(y_0 - y)^2 + z_0^2\}}$$

$$= -\frac{\mu_0 J z_0}{2\pi} \left[\frac{1}{z_0} \arctan \frac{y - y_0}{z_0} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \begin{cases} -\frac{\mu_0 J}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) & \text{als } z_0 > 0 \\ -\frac{\mu_0 J}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) & \text{als } z_0 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\mu_0 J/2 & \text{als } z_0 > 0 \\ +\mu_0 J/2 & \text{als } z_0 < 0 \end{cases}$$