Tentamen *Elektromagnetisme* (NS-103B)

woensdag 15 april 2009

15:00–18:00 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag zonder bewijs van de navolgende gegevens gebruik maken, behalve wanneer juist om een afleiding daarvan gevraagd wordt.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- In dit tentamen kunt u in totaal 90 punten behalen (aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel). Het tentamencijfer wordt: $1 + \frac{\text{behaald aantal punten}}{10}$.

SUCCES!

Gegevens

- Elektrische veld van:
  - Puntlading q:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

  - Homogeen geladen bolschil, met totale lading Q:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{binnen de bolschil} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} & \text{buiten de bolschil} \end{cases}$$

- Wet van Gauss:

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{omvat}}}{\epsilon_0}$$

- Relaties tussen elektrische potentiaal en elektrisch veld:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(\vec{a}) - V(\vec{b}) \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

- Het elektrische veld staat altijd loodrecht op een equipotentiaalvlak.

- Eigenschappen van een geleider:
  - De potentiaal heeft overal in een geleider dezelfde waarde.
  - Het elektrische veld is overal in een geleider nul.
  - Net buiten een geleider geldt voor het elektrische veld:

    $$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

    Hierbij is σ de oppervlakteladingsdichtheid aan de rand, en $\hat{n}$ de eenheidsvector loodrecht op de rand die de geleider uit wijst.

- Wet van Biot-Savart:

  $$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Wet van Faraday:
  De geïnduceerde spanning $\mathcal{E}$ in een gesloten kring is gelijk aan de afname van de magnetische flux door een oppervlak dat de kring als rand heeft:

  $$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- Wet van Lenz:
  De geïnduceerde spanning $\mathcal{E}$ wekt een inductiestroom op die de fluxverandering tegenwerkt.

- Wet van Ohm:

  $$V = IR$$

1 Het elektrische veld van een uniform geladen plat vlak

(10 punten)

Het elektrische veld van een uniforme oppervlaktelading op het vlak $z = 0$, met oppervlakteladingsdichtheid σ, wordt gegeven wordt door:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{voor } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{voor } z < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Hierbij is $\hat{z}$ de eenheidsvector in de z-richting.

Toon (1) aan met gebruikmaking van symmetrieregels en de wet van Gauss.

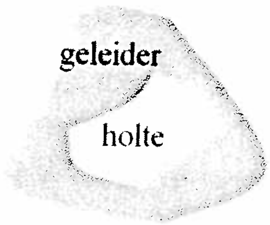
Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

2 Een geleider met een holte

(a: 5 punten   b: 10 punten   c: 10 punten   d: 10 punten)

Bij een geleider is het altijd zo dat zich alleen op de randen netto lading kan bevinden, en wel zodanig verdeeld over de randen dat *in* de geleider nergens een elektrisch veld heerst. In deze opgave gaan we voor enkele gevallen die ladingsverdeling bepalen.

Beschouw allereerst een geleider die massief is op een (willekeurig gevormde) *lege* holte na. In de figuur is een dwarsdoorsnede ter hoogte van de holte afgebeeld. Bedenk echter dat de geleider de holte volledig omhult.

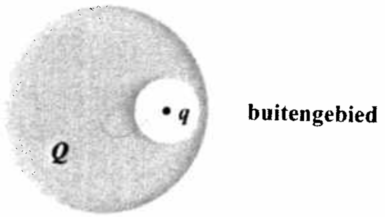


a. Toon aan dat de *totale* lading op de rand bij de holte nul is.

Uit het feit dat de *totale* lading op de rand bij de holte nul is, volgt niet noodzakelijkerwijs dat de lading *overal* op die rand nul is. Op sommige plekken zou de lading immers positief kunnen zijn en op andere negatief. Met behulp van een extra argument volgt echter dat deze situatie zich *niet* voor kan doen.

b. Toon aan dat de ladingsverdeling *overal* op de rand bij de holte nul is.
Hint: Toon eerst aan dat de potentiaal overal in de holte constant moet zijn.

Indien zich in een holte van een geleider *wel* lading bevindt, wordt de situatie ingewikkelder. Wat betreft de ladingsverdeling op de geleider geldt nog steeds dat zich alleen op de randen netto lading kan bevinden, en wel zodanig verdeeld over de randen dat *in* de geleider nergens een elektrisch veld heerst. In de rest van deze opgave mag u aannemen dat deze verdeling *uniek* bepaald is, dus dat er geen twee verschillende ladingsverdelingen zijn (met dezelfde totale lading) die allebei maken dat het elektrische veld overal in de geleider nul is.

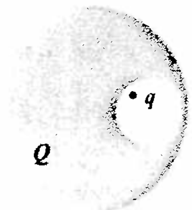


We beschouwen nu een geladen bolvormige geleider. De geleider is massief op een bolvormige holte na. De totale lading op de geleider is Q. Verder bevindt zich *in het middelpunt* van de bolvormige holte een puntlading q.

c. Bepaal het elektrische veld in de holte en in het buitengebied.
Hint: Vind door verstandig gokwerk eerst ladingsverdelingen op de rand bij de holte en op de buitenrand zodanig dat het veld overal in de geleider nul is en de totale lading op de geleider Q. Als u *een* ladingsverdeling gevonden heeft die voldoet, dan is dat *de* ladingsverdeling (want deze is uniek bepaald).

De puntlading q wordt nu verplaatst naar *een andere positie* binnen de bolvormige holte.

d. Verandert door deze verplaatsing van de puntlading:



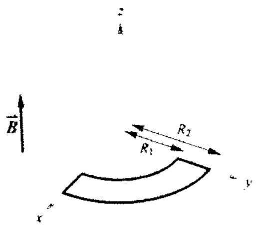
(i) het elektrische veld in het buitengebied?
(ii) het elektrische veld in de holte?
(iii) de ladingsverdeling op de buitenrand?
(iv) de ladingsverdeling op de rand bij de holte?

Licht uw antwoorden toe. Daarbij hoeft u de gevallen (i) t/m (iv) niet per se in die volgorde af te gaan.

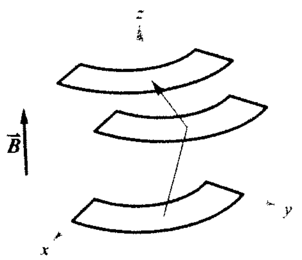
3 Een draadraam van verbonden kwartcirkels

(a: 10 punten b: 6 punten c: 14 punten)

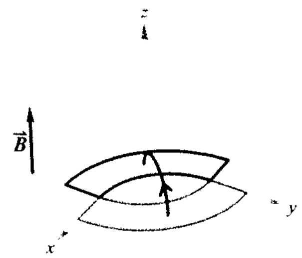
Beschouw een draadraam in het vlak $z = 0$ dat bestaat uit twee met elkaar verbonden kwartcirkels. Beide kwartcirkels hebben de oorsprong als middelpunt en de stralen zijn R_1 resp. R_2. Het draadraam bevat geen spanningsbron. Wel bevindt het zich in een *constant* en *homogeen* magnetisch veld $\vec{B}$ in de positieve z-richting. Het magnetische veld strekt zich uit over een ruime omgeving van het draadraam.



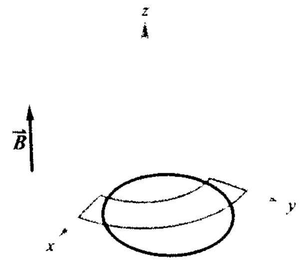
We beschouwen de volgende drie gevallen.



(i): Het draadraam wordt verplaatst, maar zodanig dat het steeds evenwijdig is aan het vlak $z = 0$.



(ii): Het draadraam wordt gekanteld om de hoekpunten van de binnenste kwartcirkel.



(iii): Het draadraam wordt vervormd tot een cirkel in het vlak $z = 0$ (met dezelfde omtrek).

a. Geef voor de gevallen (i) t/m (iii) aan:

- *of* er een stroom door het draadraam gaat lopen;
- *zo ja, in welke richting.*

Licht uw antwoorden kort toe, zo nodig met een duidelijke tekening.

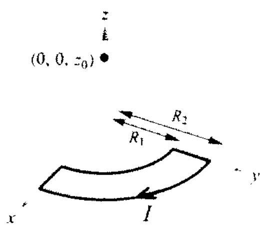
We beschouwen weer de oorspronkelijke positie en vorm van het draadraam. Het bevindt zich nu in een magnetisch veld dat in een ruime omgeving van het draadraam homogeen is en in de loop van de tijd t *in grootte toeneemt*:

$$\vec{B}(t) = c\,t\,\hat{z}$$

Hierbij is c een positieve constante [T / s], terwijl $\hat{z}$ de eenheidsvector in de z-richting is. Verder is de weerstand van de draad R.

b. Bepaal voor het zojuist beschreven geval de grootte en de richting van de stroom die door het draadraam loopt.

We beschouwen tenslotte het geval dat er *geen extern* magnetisch veld is. Wel bevat de kring nu een spanningsbron (niet weergegeven in de figuur) ten gevolge waarvan in de aangegeven richting een *stroom* I loopt. Daardoor wekt de kring zelf wel een magnetisch veld $\vec{B}$ op. We gaan dit veld bepalen in een punt $(x = 0,\ y = 0,\ z = z_0)$, dus in een punt op de z-as.



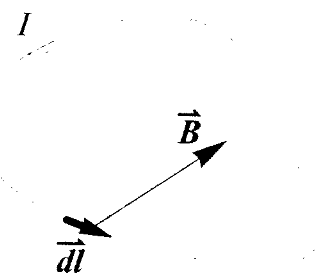
c. Bepaal met behulp van de wet van Biot-Savart de drie componenten van het magnetische veld van de stroomkring in een punt op de z-as, dus $B_x(0,0,z_0)$, $B_y(0,0,z_0)$ en $B_z(0,0,z_0)$.

<u>Gegeven</u>: Een primitieve (naar u) van $\dfrac{1}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\dfrac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}$.

4 Een stroomkring in het veld van een magnetische dipool

(a: 8 punten b: 7 punten)

Een kring voert in de aangegeven richting een stroom I, en bevindt zich in een magnetisch veld $\vec{B}$. Ten gevolge van het dit veld ondervindt het elementje $\mathrm{d}\vec{l}$ van de kring een magnetische kracht $\mathrm{d}\vec{F}$. Door het elementje bewegen immers elektronen (lading $-e$). In het elementje $\mathrm{d}\vec{l}$ is de elektronendichtheid n en de driftsnelheid $\vec{v}_{\mathrm{dr}}$. De doorsnede van de draad bij het elementje $\mathrm{d}\vec{l}$ is A.

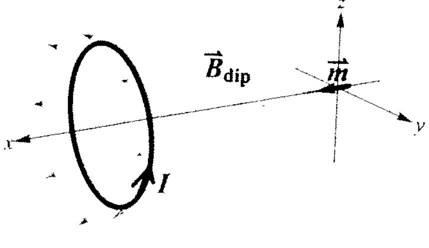


a. Voor de magnetische kracht op een met snelheid $\vec{v}$ bewegende puntlading q geldt: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$. Leid hiermee af dat voor de magnetische kracht $\mathrm{d}\vec{F}$ op het lijnelementje geldt:

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B} \qquad (2)$$

Hierbij is $\vec{B}$ het magnetische veld ter plaatse van het lijnelementje. Maak bij de afleiding gebruik van de definitie van stroom: de hoeveelheid lading die per tijdseenheid in de aangegeven richting passeert door een oppervlak loodrecht op de stroomdraad.

In het vervolg van deze opgave mag u gebruik maken van (2).



Beschouw nu een magnetische dipool $\vec{m}$ in de oorsprong en een cirkelvormige stroomkring. De kring staat loodrecht op de x-as en het middelpunt ervan ligt op de x-as. In de aangegeven richting voert de kring een stroom I. Het magnetische dipoolveld $\vec{B}_{\mathrm{dip}}$ is inhomogeen en rotatie-symmetrisch om de x-as.

b. Leg uit, gebruikmakend van de eigenschappen van $\vec{B}_{\mathrm{dip}}$ (zie de figuur), dat de totale magnetische kracht van de dipool op de stroomkring in de richting van de negatieve x-as wijst. Gebruik bij uw uitleg een tekening van een dwarsdoorsnede van de situatie, bijvoorbeeld in het xz-vlak.