Hertentamen ELE1 – 2 juli 2012

1a) Deel de strook in elementjes met hoogte dz en breedte $Rd\varphi$. Elk heeft een lading $\sigma_0 R d\varphi dz$. Het elementje bevindt zich in $\vec{r} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. We berekenen het veld in $\vec{r}_0 = (0,0,z_0)$.
Volgens Coulomb:

$$d\vec{E} = \frac{\sigma_0 R d\varphi dz}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(0,0,z_0) - (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)}{|(0,0,z_0) - (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)|^3}$$

$$= \frac{\sigma_0 R d\varphi dz}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-R\cos\varphi, -R\sin\varphi, z_0 - z)}{\{R^2 + (z_0 - z)^2\}^{3/2}}$$

Nu integreren we over φ; het is duidelijk dat $dE_x = dE_y = 0$. Blijft over:

$$E_z = \frac{\sigma_0 R dz}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{z_0 - z}{\{R^2 + (z_0 - z)^2\}^{3/2}} d\varphi$$

$$= \frac{\sigma_0 R dz}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{z_0 - z}{\{R^2 + (z_0 - z)^2\}^{3/2}}$$

b) We integreren nu over z:

$$E_z = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{z_0 - z}{\{R^2 + (z_0 - z)^2\}^{3/2}} dz$$

$$= \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z_0 - z)^2}} \right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$= \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z_0 - \frac{L}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z_0 + \frac{L}{2})^2}} \right\}$$

c) Het elektrisch veld is conservatief, dus de gevraagde arbeid is te berekenen m.b.v. elk pad met hetzelfde begin- en eindpunt. Een makkelijker pad is een recht lijnstuk langs de z-as omlaag. Een parametrisering hiervan is $\vec{r}(z) = (0,0,z)$. De arbeid is dan:

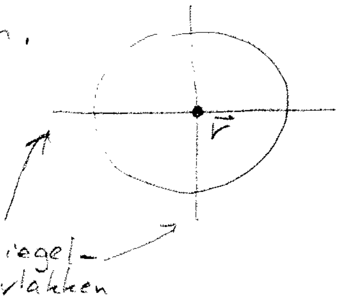
$$W = -q \int_{+L/2}^{0} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{z}\, dz = \frac{-q\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \int_{L/2}^{0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} \right\} dz$$

$$= -\frac{q\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \left\{ \left[\ln\left(z - \frac{L}{2} + \sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}\right) \right]_{L/2}^{0} - \left[\ln\left(z + \frac{L}{2} + \sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}\right) \right]_{-L/2}^{0} \right\}$$

$$= \frac{-q\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \left\{ \ln\left(-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + R^2}\right) - \ln R - \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + R^2}\right) + \ln\left(L + \sqrt{L^2 + R^2}\right) \right\}$$

(Verder vereenvoudigen is tijdverspilling.)

2a) De richting van het veld volgt uit de symmetrie:
In een willekeurig punt $\vec{r}$ zijn er twee onderling
loodrechte spiegelvlakken die de bol precies in twee
gelijke delen snijden. Het E-veld in $\vec{r}$ ligt dus in
beide vlakken tegelijk, dus langs hun snijlijn.



Dus: $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\,\hat{r}$.

Door rotatiesymmetrie rond elk as door het middelpunt blijft de ladingsverdeling gelijk. Dus $\vec{E}$ hangt niet af van θ en φ:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}.$$

De grootte van $E(r)$ volgt uit de wet van Gauss:
Kies als Gaussisch oppervlak een bol die concentrisch is met het geladen boloppervlak:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{omvat}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oint E(r)\,\hat{r} \cdot \hat{r}\, dA = \frac{Q_{omvat}}{\varepsilon_0} \qquad \text{want } d\vec{A} = \hat{n}\, dA = \hat{r}\, dA$$

$$\Rightarrow E(r) \oint dA = \frac{Q_{omvat}}{\varepsilon_0} \qquad \text{want de integraal gaat over constante } r.$$

$$\Rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{omvat}}{\varepsilon_0}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & \text{als } r > R \\ 0 & \text{als } r < R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} & \text{als } r > R \\ 0 & \text{als } r < R \end{cases}$$

Het eerste veld is gelijk aan dat van een puntlading in het middelpunt van de bol.

b) (i) Gauss toegepast op een bolvormig oppervlak rond een holte levert een flux nul want $\vec{E} = \vec{0}$ in een geleider. De omvatte lading is dus nul. Op het oppervlak van holte 1 zit dus $-q_1$ en bij holte 2 zit $-q_2$. Deze lading zit homogeen verdeeld, want deze verdeling geeft een veld $\vec{E} = \vec{0}$ buiten de holte, zoals moet. Dit moet dan meteen de enige geschikte verdeling zijn. Er blijft dan een lading $Q + q_1 + q_2$ over op de geleider. Deze mag geen veld hebben binnen de geleider, dus hij moet homogeen verdeeld zijn.

(ii) Superpositie: Het veld is gelijk aan de som van de velden van holte 1 bestaande uit q_1 en $-q_1$ eromheen plus idem voor holte 2 plus dat van $Q+q_1+q_2$.
De velden van beide holten waren nul (buiten de holten).
Blijft over de homogene lading $Q+q_1+q_2$. Het gegeven bij vraag 2a geeft: $\vec{E}(r) = \dfrac{Q+q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$.

(iii) De ladingsverdelingen van holte 2 en van de $Q+q_1+q_2$ leveren in holte 1 een veld van nul. (Immers holte 2 heeft $\vec{E}=\vec{0}$ erbuiten en $Q+q_1+q_2$ heeft $\vec{E}=\vec{0}$ binnen de bol.) Blijft over het veld van de lading $-q_1$ op de holte. Maar die is homogeen, zodat het veld binnen holte nul is. De kracht op q_1 is dus ook nul

(iv) Zelfde redenering als bij (iii).

c) (i) Uit Gauss volgt weer dat op de holten een lading van $-q_1$ resp. $-q_2$ zit. Bij holte 2 is niets veranderd en moet lading $-q_2$ nog steeds homogeen zijn. Bij holte 1 echter moet de ladingsverdeling anders zijn, dus inhomogeen over het oppervlak van de holte. Dit moet, want het veld buiten holte 1 moet nog steeds nul zijn (geleider). De resterende lading $Q+q_1+q_2$ moet weer homogeen op het buitenoppervlak zitten, want het veld ervan moet nul zijn binnen de geleider.

(ii) Holtes 1 en 2 hebben weer een veld nul buiten de holte. De homogene lading $Q+q_1+q_2$ heeft weer een veld $\dfrac{Q+q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

(iii) De bolsymmetrische verdelingen van holte 2 en het buitenoppervlak hebben weer een veld nul bij q_1. Blijft over het veld van de ladingsverdeling op holte 1. Dus is niet langer homogeen. Dus is het veld ervan ook niet langer nul erbinnen wegens uniciteit v.d. ladingsverdeling. De kracht op q_1 is dus niet langer nul.

(iv) Ladingsverdelingen q_1 en $Q+q_1+q_2$ veroorzaken geen veld binnen de geleider. Dus ook niet als daar een holte 2 in gemaakt wordt. De kracht op q_2 is dus nul.

3a) De dipoolverdeling is equivalent aan een oppervlaktepoolverdeling ν_0 op $z=d$ en $-\nu_0$ op $z=0$. (De volumepoolverdeling $-\mathrm{div}\,\vec{\nu} = 0$.) De poolverdeling is dus analoog aan het veld van twee parallelle, homogeen geladen platen.

Bereken eerst het veld van de plaat op $z=0$ in het punt $\vec{r_0} = (0,0,z_0)$:

Een opp.-elementje $r\,dr\,d\theta$ in punt $\vec{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ draagt een pool $-\nu_0 r\,dr\,d\varphi$. Het veld hiervan in $\vec{r_0}$ is:

$$d\vec{B}(\vec{r_0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot(-\nu_0 r\,dr\,d\varphi)\cdot\frac{(0,0,z_0)-(r\cos\varphi, r\sin\varphi,0)}{|(0,0,z_0)-(r\cos\varphi,r\sin\varphi,0)|^3}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nu_0 r\,dr\,d\varphi\cdot\frac{(-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, z_0)}{(r^2+z_0^2)^{3/2}}$$

Integreren:

$$\vec{B}(\vec{r_0}) = \frac{-\mu_0\nu_0}{4\pi}\int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\varphi\ \frac{(r^2\cos\varphi, r^2\sin\varphi, rz_0)}{(r^2+z_0^2)^{3/2}}$$

Dus $B_x = B_y = 0$.

$$B_z^{(1)}(\vec{r_0}) = \frac{-\mu_0\nu_0}{4\pi}\cdot 2\pi z_0\int_0^R dr\,\frac{r}{(r^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-\mu_0\nu_0 z_0}{2}\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+z_0^2}}\right]_0^R$$

$$= -\frac{\mu_0\nu_0}{2}\left(\frac{z_0}{|z_0|} - \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right)$$

Het veld van de plaat met poolverdeling $+\nu_0$ op $z=d$ is dus

$$\vec{B}_z^{(2)}(\vec{r_0}) = +\frac{\mu_0\nu_0}{2}\left(\frac{z_0-d}{|z_0-d|} - \frac{z_0-d}{\sqrt{R^2+(z_0-d)^2}}\right)\hat{z}$$

Superpositie:

$$\vec{B} = \vec{B}^{(1)} + \vec{B}^{(2)}$$

$$= \frac{\mu_0\nu_0}{2}\left(\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{z_0-d}{\sqrt{R^2+(z_0-d)^2}}\right)\hat{z}$$

3b) Bepaal de Taylorontwikkeling van de tweede term in (1):

$$\frac{z-d}{\sqrt{(z-d)^2+R^2}} \quad \text{voor } d=0 \text{ geeft } \quad \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

Afgeleide naar d:

$$\frac{-\sqrt{(z-d)^2+R^2} - (z-d)\cdot -2(z-d)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left((z-d)^2+R^2\right)^{-1/2}}{(z-d)^2+R^2}$$

$$= \frac{-\left((z-d)^2+R^2\right)+(z-d)^2}{\left((z-d)^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{-R^2}{\left((z-d)^2+R^2\right)^{3/2}}$$

voor $d=0$ geeft $\frac{-R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}$

Dus:
$$\frac{z-d}{\sqrt{(z-d)^2+R^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,d + O(d^2)$$

Substitutie in (1) geeft:

$$\vec{B}^{\nu} = \frac{1}{2}\mu_0 \nu_0 \frac{R^2 d}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z} + O(d^2\nu_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{d\to 0,\\ \nu_0 d = I}} \vec{B}^{\nu} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{R^2 I}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$$

c) Een stroomelementje in $\vec{r} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$. Dan is $d\vec{r} = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)\,d\varphi$. Verder is $\vec{r_0} = (0, 0, z_0)$.

Het uitprodukt
$$d\vec{r}\times(\vec{r_0}-\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ -R\cos\varphi & -R\sin\varphi & z_0 \end{vmatrix} d\varphi$$

$$= \left(\hat{x}\, z_0 R\cos\varphi + \hat{y}\, z_0 R\sin\varphi + \hat{z}\, R^2\right)d\varphi$$

Volgens Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{(z_0 R\cos\varphi,\ z_0 R\sin\varphi,\ R^2)}{(R^2+z_0^2)^{3/2}}\,d\theta$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow dB_x = dB_y = 0 \\ &B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z_0^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{dit is gelijk aan (2).}$$