Hertentamen *Elektromagnetisme: Theorie* (NS-107B)

maandag 19 augustus 2013

9:00–12:00 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van navolgende algemene gegevens gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren.
  Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Verder krijgt u 10 punten cadeau.

SUCCES!

Algemene gegevens

$$\vec{F}^{\,\mathrm{el}}_{Q,\vec{R}\to q,\vec{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R}\,)}{|\vec{r}-\vec{R}\,|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntladingen)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{mag}}_{P,\vec{R}\to p,\vec{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R}\,)}{|\vec{r}-\vec{R}\,|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntpolen)}$$

$$\vec{E}^{\,q,\vec{r}}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}_0-\vec{r}\,)}{|\vec{r}_0-\vec{r}\,|^3} \qquad \text{(veld puntlading)}$$

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{l(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r}\,)\cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \text{(relatie veld en potentiaal)}$$

$$\oint \vec{E}\,\cdot\hat{n}\;\mathrm{d}O = \frac{Q_{\mathrm{omvat}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(wet van Gauss)}$$

$$\oint \vec{B}(\vec{r}\,)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0\,I_{\mathrm{omvat}} \qquad \text{(wet van Ampère)}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}\times(\vec{r}_0-\vec{r}\,)}{|\vec{r}_0-\vec{r}\,|^3} \qquad \text{(wet van Biot-Savart)}$$

- Voor een drie-dimensionale magneet met een volume*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\nu}$ is de equivalente poolverdeling de combinatie van een volume*pool*verdeling met dichtheid $-\operatorname{div}\vec{\nu}$ en een oppervlakte*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\nu}\cdot\hat{n}$.

Vervolg algemene gegevens

Indien nodig mag u gebruik maken van de volgende gegevens over de velden van specifieke ladingsverdelingen (of *mutatis mutandis* magnetische poolverdelingen).

- Beschouw een oneindig lang, homogeen geladen cilinderoppervlak (co), met straal R en ladingsdichtheid σ_0 (een constante die uitgedrukt wordt in $\mathrm{C/m^2}$). Kies het assenstelsel zodanig dat de as samenvalt met de z-as. Er geldt dan voor het elektrische veld van het cilinderoppervlak, in het punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{co}}(\vec{r}_0) \;=\; \begin{cases} \vec{0} & \text{als } \rho_0 < R \\[2ex] \dfrac{\sigma_0 R}{\epsilon_0}\,\dfrac{\hat{\rho}_0}{\rho_0} & \text{als } \rho_0 > R \end{cases}$$

  Hierbij geldt $\rho_0 \;=\; \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ en $\hat{\rho}_0 \;=\; \dfrac{1}{\rho_0}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Beschouw een oneindig uitgestrekt, homogeen geladen plat vlak (pv), met ladingsdichtheid σ_0 (een constante die uitgedrukt wordt in $\mathrm{C/m^2}$). Kies het assenstelsel zodanig dat het vlak samenvalt met het xy-vlak. Er geldt dan voor het elektrische veld van het platte vlak, in het punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{pv}}(\vec{r}_0) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{z} & \text{als } z_0 > 0 \\[2ex] -\dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\hat{z} & \text{als } z_0 < 0 \end{cases}$$

1 Een geladen draad in een uitgeholde geleider

a: 14 b: 13 c: 13 (totaal: 40)

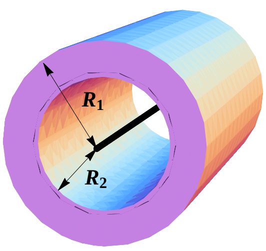
Beschouw een oneindig lange, homogeen geladen lijn, met lijnladingsdichtheid λ_0 (een constante die uitgedrukt wordt in C/m). Kies het coördinatenstelsel zodanig dat de lijn op de z-as ligt.

a. Toon met coulombintegratie aan dat geldt voor het elektrische veld $\vec{E}^{\,\mathrm{rl}}$ van de oneindig lange rechte lijn (rl) met lijnladingsdichtheid λ_0:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{rl}}(\vec{r}_0) \;=\; \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{\hat{\rho}_0}{\rho_0}$$

Gegeven: Een primitieve (naar x) van $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

Een oneindig lange cilindrische *geleider* met straal R_1 is *neutraal*, d.w.z. de totale lading op de geleider is nul. Concentrisch met de as is een cilindrische holte uitgeboord met straal R_2. Op de as van de cilinder (dus in de holte) bevindt zich een oneindig lange lijnlading met dichtheid λ_0.
In de figuur is de situatie weergegeven. Bedenk echter dat de geleider en de lijnlading beide oneindig lang zijn.



b. Leid af dat geldt voor het elektrische veld $\vec{E}^{\,\text{sys}}$ van het systeem van de geleider en de lijnlading:

$$\vec{E}^{\,\text{sys}}(\vec{r}_0) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\,\dfrac{\hat{\rho}_0}{\rho_0} & \text{als } 0 < \rho_0 < R_2 \\[2ex] \vec{0} & \text{als } R_2 < \rho_0 < R_1 \\[2ex] \dfrac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\,\dfrac{\hat{\rho}_0}{\rho_0} & \text{als } \rho_0 > R_1 \end{cases}$$

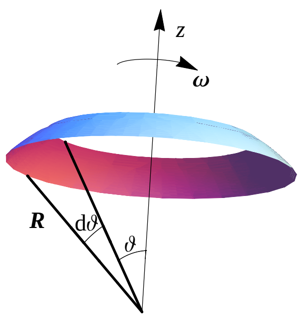
c. Zij nu V^{sys} de potentiaal van $\vec{E}^{\,\text{sys}}$ die op de geleider de waarde 0 heeft. Bepaal $V^{\text{sys}}(\vec{r}_0)$ voor $\vec{r}_0$ buiten de geleider.

2 Een roterend geladen boloppervlak en een supergeleidende bol

a: 5 b: 15 c: 5 (totaal: 25)

Magnetisch veld van een roterend homogeen geladen boloppervlak

Beschouw een homogeen geladen boloppervlak (bo), met straal R en ladingsdichtheid σ_0 (een constante die uitgedrukt wordt in C/m^2). Het oppervlak roteert om de z-as, met constante hoekfrequentie ω, in de φ-richting. De benodigde tijd T voor een volledige rotatie is dus: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Bij het roterende boloppervlak hoort een magnetisch veld. We kunnen het oppervlak immers opvatten als een collectie van stroomkringen. Beschouw namelijk de strook van het boloppervlak tussen ϑ en $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$.



a. Leg uit dat we deze strook van het roterende boloppervlak kunnen opvatten als een stroomkring die in de φ-richting een stroom voert ter grootte:

$$\mathrm{d}I \;=\; \omega\,\sigma_0\,R^2\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$

b. Toon met behulp van de wet van Biot-Savart aan dat geldt voor de bijdrage $\mathrm{d}\vec{B}^{\,\text{strook}}$ van de roterende strook aan het magnetische veld op de z-as:

$$\mathrm{d}\vec{B}^{\,\text{strook}}(0,0,z_0) \;=\; \tfrac{1}{2}\mu_0\,\omega\,\sigma_0\,R^4\,\frac{\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{\left\{R^2 + z_0^2 - 2Rz_0\cos\vartheta\right\}^{\frac{3}{2}}}\,\hat{z}$$

Na integratie over de hoek ϑ volgt voor het magnetische veld van het gehele roterende boloppervlak, op de z-as binnen het oppervlak ($|z_0| < R$):

$$\vec{B}^{\,\text{roterend boloppervlak}}(0,0,z_0) \;=\; \tfrac{2}{3}\mu_0\,\omega\,\sigma_0\,R\,\hat{z}$$

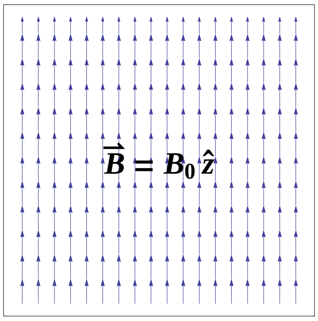
Overal op de z-as binnen het oppervlak is het magnetische veld van het roterende boloppervlak dus hetzelfde (dezelfde grootte en richting). Er blijkt zelfs te gelden dat het magnetische veld van het roterende boloppervlak *overal* binnen het oppervlak hetzelfde is:

$$\text{voor } |\vec{r}\,| < R\text{:} \quad \vec{B}^{\,\text{roterend boloppervlak}}(\vec{r}\,) \;=\; \tfrac{2}{3}\mu_0\,\omega\,\sigma_0\,R\,\hat{z}$$

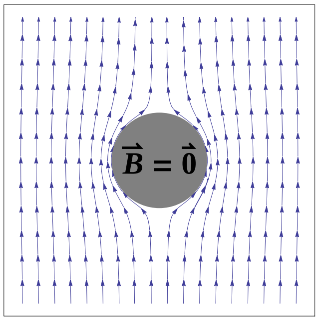
Van dit resultaat mag u in de rest van de opgave gebruik maken.

Een supergeleidende bol in een homogeen magnetisch veld

Wanneer een geleider in een elektrisch veld gebracht wordt, gaat de lading in de geleider zich zo verdelen over de rand dat overal in het inwendige van de geleider het netto elektrische veld nul is. *Supergeleiders* hebben een vergelijkbare eigenschap. Wanneer een supergeleider in een *magnetisch* veld gebracht wordt, gaat een zodanige *stroom* lopen over de rand dat overal in het inwendige van de supergeleider het netto *magnetische* veld nul is. Wanneer zo'n stroom eenmaal loopt in een supergeleider, kan deze ook ongehinderd blijven lopen.

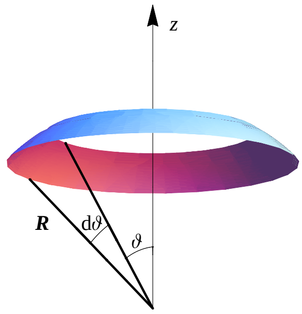


In een bepaald gebied (zie links) is een *homogeen* magnetisch veld aangelegd: $\vec{B} = B_0\hat{z}$, met B_0 een constante die wordt uitgedrukt in tesla. Een massieve bolvormige supergeleider wordt in dit gebied gebracht (zie rechts).



Over het oppervlak van de supergeleidende bol gaat een stroom lopen. Het magnetische veld daarvan heft in het inwendige van de bol het aangelegde magnetische veld op.

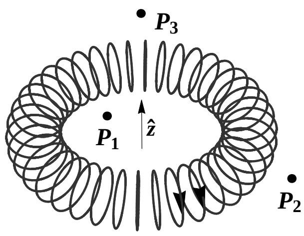
c. In de figuur is een strook van het oppervlak van de supergeleider weergegeven. Geef de grootte en omloopszin van de stroom die in die strook gaat lopen. Licht uw antwoord toe.
Opmerking: U hoeft hier geen strikt bewijs te leveren. Verstandig giswerk volstaat.



3 Een toroïdale spoel en een toroïdale magneet

a: 12 b: 6 c: 7 (totaal: 25)

Een stroomspoel in de vorm van een torus bestaat uit een heleboel cirkelvormige windingen. De windingen liggen zo dicht opeen dat de spoel opgevat kan worden als een heleboel losse cirkelvormige stroomkringen. De stroomkringen voeren een stroom in de aangegeven richting.



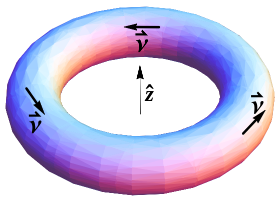
a. Toon met behulp van symmetrie-overwegingen en de wet van Ampère aan dat buiten de spoel geen magnetisch veld heerst. Beschouw daartoe drie representatieve punten buiten de spoel (zie de figuur).

  – Een punt P_1 ter hoogte van de spoel, in het binnengebied.
  – Een punt P_2 ter hoogte van de spoel, in het buitengebied.
  – Een punt P_3 boven (of onder) de spoel.

Toon aan dat in elk van de drie punten geen magnetisch veld heerst.
Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

Volgens het equivalentieprincipe van Ampère geeft een dunne platte magneet, die homogeen en loodrecht op het vlak gemagnetiseerd is, buiten de magneet hetzelfde veld als een stroomkring in de vorm van de rand van de magneet.

Wanneer we elk van de stroomkringen van de toroïde-vormige stroomspoel vervangen door een dunne, platte schijfmagneet die loodrecht gemagnetiseerd is, dan krijgen we een drie-dimensionale magneet in de vorm van een torus, met een volumedipooldichtheid $\vec{\nu}$ in de φ-richting:



$$\vec{\nu} \;=\; \nu_0\,\hat{\varphi}$$

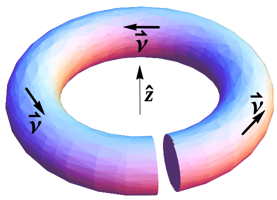
Hierbij is ν_0 een constante die uitgedrukt wordt in de eenheid A/m. Verder geldt:

$$\hat{\varphi} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daar buiten de stroomspoel geen magnetisch veld heerst, suggereert het equivalentieprincipe van Ampère dat ook buiten de *magneet* geen veld heerst.

b. Toon aan, door de equivalente poolverdeling te bepalen, dat inderdaad buiten de magneet geen magnetisch veld heerst.

Veronderstel nu dat een plakje uit de magneet gesneden wordt.



c. Bepaal het magnetische veld dat (in goede benadering) in de vrijgemaakte ruimte gemeten wordt, wanneer het weggesneden plakje zeer dun is.