Tentamen *Elektromagnetisme*
NS-103B, theoriedeel NS-107B, NS-112B

woensdag 2 juli 2014

13:30–16:30 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van de algemene gegevens op de volgende pagina gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel.
- **Indien u dit tentamen wilt laten gelden voor NS-103B of voor het theoriegedeelte van NS-107B, vermeld dit dan duidelijk.**

SUCCES!

Bepaling cijfer

Studenten die het tentamen willen laten gelden voor NS-103B, of voor het theoriegedeelte van NS-107B, hoeven onderdeel 1c) en opgave 4 niet te maken, maar mogen dit wel voor extra bonuspunten. Hun cijfer wordt bepaald door:

$$\text{minimum}\left\{10, \tfrac{1}{9}\,(10 + \text{aantal behaalde punten})\right\}$$

De overige studenten maken het hele tentamen en hun cijfer wordt bepaald door:

$$\tfrac{1}{10}\,(10 + \text{aantal behaalde punten})$$

Algemene gegevens

$$\vec{F}^{\,\mathrm{el}}_{Q,\vec{R}\to q,\vec{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntladingen)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{mag}}_{P,\vec{R}\to p,\vec{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntpolen)}$$

$$\vec{E}^{\,q,\vec{r}}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}_0-\vec{r})}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3} \qquad \text{(veld puntlading)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{ext}\to q,\vec{r}} = q\,\vec{E}^{\,\mathrm{ext}}(\vec{r}) \qquad \text{(kracht op puntlading in extern veld)}$$

$$V^{q,\vec{r}}_{\infty}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{r}|} \qquad \text{(potentiaal puntlading)}$$

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,V \qquad \text{(relatie elektrisch veld en potentiaal)}$$

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{l(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \text{(relatie potentiaal en elektrisch veld)}$$

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}O = \frac{Q_{\mathrm{omvat}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(wet van Gauss)}$$

$$\vec{B}^{\,c}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\oint_c \mathrm{d}\vec{r}\times\frac{(\vec{r}_0-\vec{r})}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3} \qquad \text{(wet van Biot-Savart)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{ext}\to c} = I\oint_c \mathrm{d}\vec{r}\times\vec{B}^{\,\mathrm{ext}}(\vec{r}) \qquad \text{(wet van Grassmann)}$$

$$\oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0\,I_{\mathrm{omvat}} \qquad \text{(wet van Ampère)}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \qquad \text{(Lorentz-kracht)}$$

- $-\int_{l(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ is de arbeid die (per eenheid van lading) verricht moet worden om een testlading, beginnend vanuit stilstand in $\vec{r}_1$, te verplaatsen langs het pad l, en tenslotte tot stilstand te brengen in $\vec{r}_2$.

- Voor een lijnmagneet langs de z-as, tussen $z = a$ en $z = b$ (waarbij $a < b$), met een lijn*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\kappa}(z) = \kappa(z)\,\hat{z}$, wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een lijn*pool*verdeling met dichtheid $-\kappa'(z)$, een punt*pool* in $(0,0,b)$ met *pool*sterkte $\kappa(b)$ en een punt*pool* in $(0,0,a)$ met *pool*sterkte $-\kappa(a)$.

- Voor een platte twee-dimensionale magneet met een oppervlakte*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\mu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een oppervlakte*pool*verdeling met dichtheid $-\,\mathrm{div}\,\vec{\mu}$ en een lijn*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\mu}\cdot\hat{n}$.

- Voor een drie-dimensionale magneet met een volume*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\nu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een volume*pool*verdeling met dichtheid $-\,\mathrm{div}\,\vec{\nu}$ en een oppervlakte*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\nu}\cdot\hat{n}$.

- Equivalentieprincipe van Ampère: Een dunne magneet met (effectieve) oppervlaktedipooldichtheid $I\,\hat{n}$ is magnetisch equivalent aan een stroomkring in de vorm van de rand van de magneet die een stroom I voert in de richting die via de rechterhandregel gerelateerd is aan $\hat{n}$.

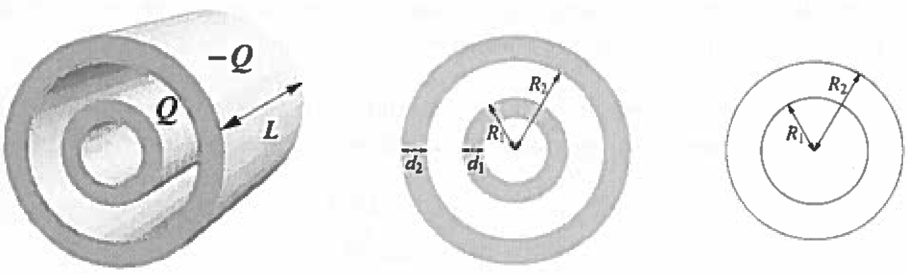
1 Een cilindrische condensator

a: 15 b: 10 c: 5 (totaal: 30)

In deze opgave mag u zonder bewijs gebruiken dat geldt voor het elektrische veld van een oneindig lang, homogeen geladen cilinderoppervlak, met straal R en ladingsdichtheid σ_0 (een constante die uitgedrukt wordt in $\mathrm{C/m^2}$):

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{als } \rho < R \\ \dfrac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \dfrac{\hat{\rho}}{\rho} & \text{als } \rho > R \end{cases}$$

Hierbij is ρ de afstand tot de as van de cilinder en $\hat{\rho}$ de loodrecht van de as af gerichte eenheidsvector.



Beschouw nu een cilindrische condensator bestaande uit twee concentrische, geleidende cilinderwanden van eindige dikte. De lengte van beide wanden is L. De totale lading op de binnenste cilinderwand is Q, op de buitenste cilinderwand $-Q$ (zie de linkerfiguur). Van de binnenste cilinderwand is de binnenstraal $R_1 - d_1$ en de buitenstraal R_1. Van de buitenste cilinderwand is de binnenstraal R_2 en de buitenstraal $R_2 + d_2$ (zie de middelste figuur voor een dwarsdoorsnede).
Om de berekeningen te vergemakkelijken, denken we de cilindrische condensator oneindig voortgezet in de lengterichting (zowel naar voren als naar achteren). Beide cilinderwanden zijn dan oneindig lang. De hoeveelheid lading per lengte-eenheid op binnenste cilinderwand is dan $\frac{Q}{L}$, en de hoeveelheid lading per lengte-eenheid op de buitenste cilinderwand $-\frac{Q}{L}$.

a. Leg uit dat in de oneindig voortgezette cilindrische condensator de lading als volgt verdeeld is over de geleiders (zie de rechterfiguur voor een dwarsdoorsnede van de betreffende oppervlakken):

- een ladingsverdeling over het buitenoppervlak van de binnenste cilinderwand ($\rho = R_1$) met oppervlakteladingsdichtheid:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi R_1 L}$$

- een ladingsverdeling over het binnenoppervlak van de buitenste cilinderwand ($\rho = R_2$) met oppervlakteladingsdichtheid:

$$\sigma_2 = -\frac{Q}{2\pi R_2 L}$$

Opmerking: U mag ervan uitgaan dat er slechts één ladingsverdeling bestaat die aanleiding geeft tot een evenwichtssituatie.

b. Toon aan dat geldt voor het potentiaalverschil V tussen de binnenste en de buitenste cilinderwand van de oneindige cilindrische condensator:

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

We beschouwen nu weer de *eindige* cilindrische condensator (lengte L). We nemen aan dat de capaciteit C van de eindige cilindrische condensator in goede benadering gegeven wordt door die van de oneindig voortgezette cilindrische condensator:

$$C = \frac{Q}{V} \simeq \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

De eindige cilindrische condensator wordt opgeladen door, startend vanuit de situatie dat beide cilinderwanden neutraal zijn, stukje bij beetje kleine hoeveelheden lading van de buitenste naar de binnenste wand over te brengen.

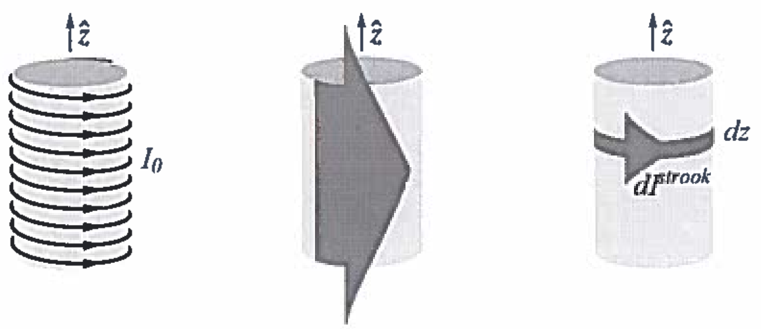
c. Toon onder de genoemde aanname aan dat geldt voor de benodigde energie U om de condensator op te laden vanuit potentiaalverschil 0 tot potentiaalverschil V_0:

$$U \simeq \frac{\pi\epsilon_0 L V_0^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Hint: U mag gebruiken dat bij een gegeven condensator de verhouding $\frac{Q}{V}$ altijd dezelfde waarde heeft, namelijk die van de capaciteit van de condensator.

Inleiding op de volgende twee opgaven

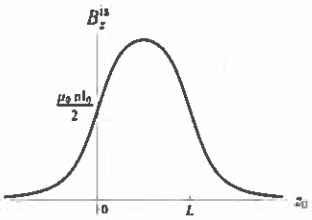
In de volgende twee opgaven gaan we het magnetische veld bepalen van een cilinderoppervlak, met lengte L en straal R, waarover de stroom continu en gelijkmatig verdeeld is (zie de middelste figuur).



We vatten deze ideale cilindrische stroomspoel op als een benadering van een echte cilindrische stroomspoel (zie links), die bestaat uit n windingen per lengte-eenheid en een stroom I_0 voert. In deze benadering geldt voor de stroom $\mathrm{d}I^{\mathrm{strook}}$ door een smalle strook met breedte $\mathrm{d}z$ van de ideale stroomspoel (zie rechts):

$$\mathrm{d}I^{\mathrm{strook}} = n\, I_0\, \mathrm{d}z$$

We kiezen het assenstelsel zodanig dat de z-as samenvalt met de as van de stroomspoel, en de stroompoel ligt tussen $z = 0$ en $z = L$.

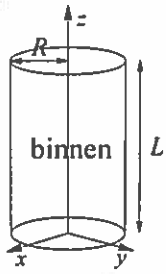


We gaan op twee verschillende manieren aantonen dat geldt voor het magnetische veld $\vec{B}^{\,\mathrm{is}}$ van de ideale stroomspoel op de z-as:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{is}}(0,0,z_0) = \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2}\left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{(z_0-L)}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right\}\hat{z} \quad (1)$$

2 Eerste manier: met behulp van equivalenties

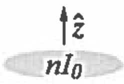
a: 5 b: 15 c: 15 (totaal: 35)



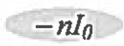
In deze opgave gaan we het magnetische veld van de ideale stroomspoel bepalen met behulp van het equivalentieprincipe van Ampère en met gebruikmaking van equivalente poolverdelingen.
Allereerst onderscheiden we twee gebieden:

- het gebied *binnen* de stroomspoel, d.w.z.: $0 < z < L$ en $\rho < R$, met ρ de afstand tot de z-as;
- het gebied *buiten* de stroomspoel: de rest van de ruimte.

a. Leg het volgende uit met gebruikmaking van het equivalentieprincipe van Ampère en equivalente poolverdelingen.
In het gebied *buiten* de stroomspoel is het veld van de stroomspoel gelijk aan het veld van de combinatie van:



- een homogene *pool*verdeling over een schijf met straal R, ter hoogte $z = 0$, met oppervlakte*pool*dichtheid: $-n\, I_0$;
- een homogene *pool*verdeling over een schijf met straal R, ter hoogte $z = L$, met oppervlakte*pool*dichtheid: $n\, I_0$.



Noem $\vec{B}^{\,\mathrm{pv}}$ het magnetische veld van de poolverdeling over de twee schijven.

b. Toon aan dat geldt:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{pv}}(0,0,z_0) = \begin{cases} \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2}\left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{(z_0-L)}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right\}\hat{z} & \text{als } z_0 < 0 \\ \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2}\left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{(z_0-L)}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}} - 2\right\}\hat{z} & \text{als } 0 < z_0 < L \\ \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2}\left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{(z_0-L)}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right\}\hat{z} & \text{als } z_0 > L \end{cases}$$

Door combinatie van de voorgaande twee onderdelen volgt dat voor $z_0 < 0$ en voor $z_0 > L$ aan (1) is voldaan (zie bovenaan de pagina).

c. Toon aan dat (1) ook geldt voor $0 < z_0 < L$.
<u>Hint</u>: Beschouw de ideale stroomspoel met daaruit weggelaten een smalle strook.

3 Tweede manier: met behulp van Biot-Savart

a: 5 b: 10 c: 5 (totaal: 20)

In deze opgave gaan we met behulp van de wet van Biot-Savart het magnetische veld $\vec{B}^{\,\mathrm{is}}$ van de ideale stroomspoel bepalen op de z-as.

a. Leg met symmetrie-argumenten uit dat in punten op de z-as het magnetische veld gericht is langs de z-as.
Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

b. Toon aan, met behulp van de wet van Biot-Savart, dat geldt voor de bijdrage van de smalle strook tussen z en $z + \mathrm{d}z$ aan het magnetische veld:

$$\mathrm{d}\vec{B}^{\mathrm{strook}}(0,0,z_0) = \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2} \frac{R^2}{\left\{R^2 + (z_0 - z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}z\, \hat{z}$$

c. Toon (1) aan (zie bovenaan pagina 5).
Gegeven: Een primitieve (naar x) van $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

4 Een elektron in een homogeen magnetisch veld

Totaal: 5

In een bepaald gebied heerst een constant en homogeen magnetisch veld. De grootte ervan is B: een *positieve* constante die uitgedrukt wordt in tesla. In de tekening wijst het magnetische veld loodrecht het papier uit. In het punt P bevindt zich een elektron (lading $-e$; massa m), op een afstand d van het punt O.
Bepaal de snelheid (*grootte* en *richting*) waarmee het elektron vanuit P weggeschoten moet worden, om ervoor te zorgen dat het een cirkel gaat doorlopen om het punt O met straal d.