Tentamen *Elektromagnetisme* (NS-112B)

dinsdag 19 april 2016

13:30–16:30 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van de algemene gegevens hieronder en op de volgende pagina gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Het cijfer wordt bepaald door:

$$\tfrac{1}{10}\,(10 + \text{aantal behaalde punten})$$

SUCCES!

Algemene gegevens

$$\vec{F}^{\,\mathrm{el}}_{Q,\vec{R}\to q,\vec{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntladingen)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{mag}}_{P,\vec{R}\to p,\vec{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntpolen)}$$

$$\vec{E}^{\,q,\vec{r}}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}_0-\vec{r})}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3} \qquad \text{(veld puntlading)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{ext}\to q,\vec{r}} = q\,\vec{E}^{\,\mathrm{ext}}(\vec{r}) \qquad \text{(kracht op puntlading in extern veld)}$$

$$V^{q,\vec{r}}_{\infty}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{r}|} \qquad \text{(potentiaal puntlading)}$$

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,V \qquad \text{(relatie elektrisch veld en potentiaal)}$$

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{l(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \text{(relatie potentiaal en elektrisch veld)}$$

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}O = \frac{Q_{\mathrm{omvat}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(wet van Gauss)}$$

$$\vec{B}^c(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_c \mathrm{d}\vec{r} \times \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \qquad \text{(wet van Biot-Savart)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{ext}\to c} = I \oint_c \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{B}^{\,\mathrm{ext}}(\vec{r}) \qquad \text{(wet van Grassmann)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_{\mathrm{omvat}} \qquad \text{(wet van Ampère)}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{(Lorentz-kracht)}$$

- $-\int_{l(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ is de arbeid die (per eenheid van lading) verricht moet worden om een testlading, beginnend vanuit stilstand in $\vec{r}_1$, te verplaatsen langs het pad l, en tenslotte tot stilstand te brengen in $\vec{r}_2$.

- Juist aan de ene kant van een geladen oppervlak is het elektrisch veld anders dan juist aan de andere kant, maar een elektrische potentiaal sluit continu aan bij het oppervlak:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \left\{ \vec{E}(\vec{r}_0 + \delta \hat{n}_0) - \vec{E}(\vec{r}_0 - \delta \hat{n}_0) \right\} = \frac{\sigma(\vec{r}_0)}{\epsilon_0} \hat{n}_0$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \{ V(\vec{r}_0 + \delta \hat{n}_0) - V(\vec{r}_0 - \delta \hat{n}_0) \} = 0$$

- De ladingsverdeling op een geleider is *uniek* bepaald.

- Voor een lijnmagneet langs de z-as, tussen $z = a$ en $z = b$ (waarbij $a < b$), met een lijn*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\kappa}(z) = \kappa(z)\,\hat{z}$, wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een lijn*pool*verdeling met dichtheid $-\kappa'(z)$, een punt*pool* in $(0,0,b)$ met *pool*sterkte $\kappa(b)$ en een punt*pool* in $(0,0,a)$ met *pool*sterkte $-\kappa(a)$.

- Voor een platte twee-dimensionale magneet met een oppervlakte*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\mu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een oppervlakte*pool*verdeling met dichtheid $-\operatorname{div}\vec{\mu}$ en een lijn*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\mu} \cdot \hat{n}$.

- Voor een drie-dimensionale magneet met een volume*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\nu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een volume*pool*verdeling met dichtheid $-\operatorname{div}\vec{\nu}$ en een oppervlakte*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\nu} \cdot \hat{n}$.

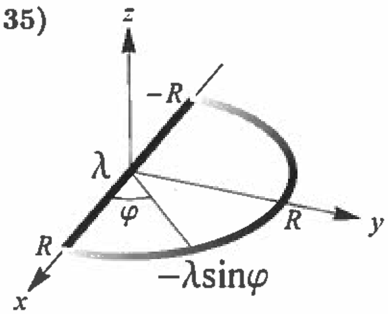
- Equivalentieprincipe van Ampère: een dunne magneet met (effectieve) oppervlaktedipooldichtheid $I\,\hat{n}$ is magnetisch equivalent aan een stroomkring in de vorm van de rand van de magneet die een stroom I voert in de richting die via de rechterhandregel gerelateerd is aan $\hat{n}$.

Wiskundige gegevens

functie	$\sin x \cos x$	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$
primitieve	$\frac{1}{2}\sin^2 x$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x$	$\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

1 Een ladingsverdeling en een magneet

a: 3 b: 7 c: 20 d: 5 (totaal: 35)



Een ladingsverdeling bestaat uit:

- een homogeen geladen recht lijnstuk op de x-as, met lijnladingsdichtheid: λ;
- een inhomogeen geladen halve cirkelboog, met lijnladingsdichtheid: $-\lambda \sin \varphi$.

Hierbij is λ een positieve constante die uitgedrukt wordt in de eenheid C/m, en φ is zoals gebruikelijk de hoek met de positieve x-as. In de figuur is voor de ladingsverdeling over de cirkelboog de variatie in ladingsdichtheid weergegeven door de zwartingsgraad: hoe zwarter, des te meer negatief.

a. Toon aan dat de totale lading op deze ladingsverdeling gelijk is aan 0 C.

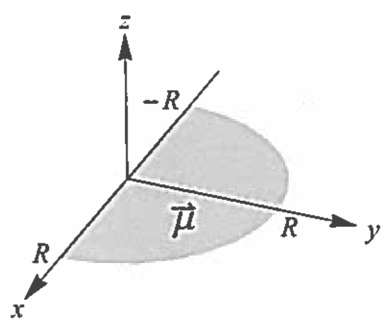
b. Geef twee vlakken waarvoor het elektrisch veld van de ladingsverdeling in het vlak zelf ligt, en schets in beide vlakken het veldlijnenpatroon.

c. Toon aan dat geldt voor de bijdrage van de cirkelboog (cb) resp. het rechte lijnstuk (rl) aan het elektrisch veld op de z-as:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{cb}}(0,0,z_0) = \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0\left(z_0^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2z_0}{R}\end{pmatrix}$$

$$\vec{E}^{\,\mathrm{rl}}(0,0,z_0) = \frac{\lambda R}{2\pi\epsilon_0\, z_0\sqrt{z_0^2+R^2}}\,\hat{z}$$

Als we in de uitdrukking voor het totale elektrisch veld van de hiervoor beschouwde ladingsverdeling de volgende substituties maken:



- $\dfrac{1}{\epsilon_0} \longrightarrow \mu_0$,
- $\lambda \longrightarrow \mu$, waarbij μ een constante is die wordt uitgedrukt in A,

dan is de resulterende uitdrukking het magnetisch veld van een platte magneet in de vorm van een halfschijf, met een zekere oppervlaktedipooldichtheid $\vec{\mu}$.

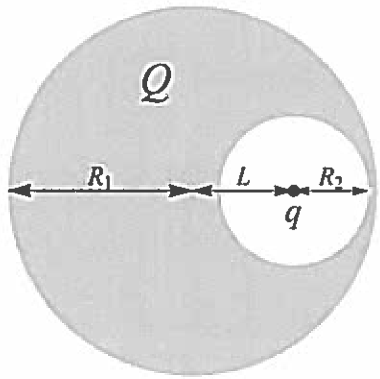
d. Geef de oppervlaktedipooldichtheid $\vec{\mu}$ van deze magneet, en licht uw antwoord kort toe.
Let op: U hoeft *niet* expliciet aan te tonen dat de door u beschreven magneet inderdaad aanleiding geeft tot een magnetisch veld van dezelfde wiskundige vorm als het elektrisch veld van de ladingsverdeling. Een beschrijving van de magnetisatie volstaat.

2 Een geleider met een holte

Totaal: 10

Gegeven: In deze opgave mag u zonder bewijs gebruiken dat geldt voor het elektrisch veld van een homogeen geladen boloppervlak:

- binnen het oppervlak is het veld nul;
- buiten het oppervlak is het veld gelijk aan dat van een puntlading in het middelpunt, met als lading de totale lading op het boloppervlak.



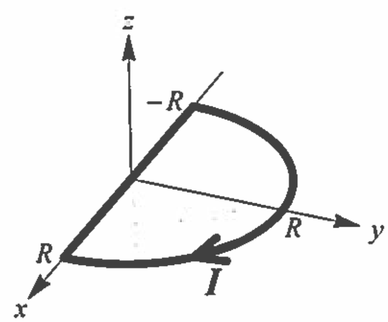
Een bolvormige geleider (straal R_1) heeft een bolvormige holte (straal R_2). Het middelpunt van de holte bevindt zich op een afstand L van het middelpunt van de geleider. (Er geldt uiteraard: $L + R_2 < R_1$.)
De totale lading op de geleider is Q. Tenslotte bevindt zich in het middelpunt van de holte een puntlading q.

Bepaal het elektrisch veld overal in de ruimte (buiten de puntlading).

3 Een stroomkring en een magneet

a: 4 b: 8 c: 3 (totaal: 15)

Een stroomdraad bestaat uit een halfcirkel (straal R) verbonden door een rechte lijn.
De draad voert een constante stroom I in de aangegeven richting.



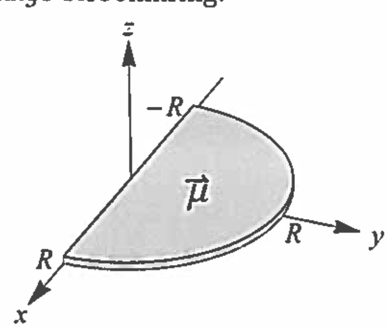
a. Geef een vlak waarvoor het magnetisch veld van deze stroomkring in het vlak zelf ligt, en schets het veldlijnenpatroon in dat vlak.

b. Toon aan dat geldt voor de bijdrage van het rechte stuk draad (rsd) aan het magnetisch veld op de z-as:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{rsd}}(0,0,z_0) = \frac{\mu_0 I R}{2\pi z_0 \sqrt{z_0^2 + R^2}}\,\hat{y}$$

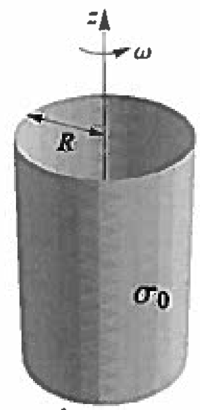
Er bestaat een dunne platte magneet in de vorm van een halfschijf die (buiten de magneet) hetzelfde magnetisch veld geeft als de *volledige* stroomkring.

c. Geef de (effectieve) oppervlaktedipooldichtheid $\vec{\mu}$ van deze magneet. Geef een korte toelichting met een verhelderende tekening.
Let op: U hoeft *niet* expliciet aan te tonen dat de door u beschreven magnetisatie inderdaad aanleiding geeft tot hetzelfde magnetisch veld als de stroomkring. Een beschrijving (met tekening) van de magnetisatie volstaat.



4 Een roterend geladen cilinderoppervlak

a: 20 b: 10 (totaal: 30)



Een cilinderoppervlak (straal R) is homogeen geladen, met oppervlakteladingsdichtheid σ_0. Het oppervlak roteert met constante hoeksnelheid $\omega > 0$ om zijn as (voor de draaiperiode T geldt dus: $T = \frac{2\pi}{\omega}$). Kies het assenstelsel zodanig dat de as samenvalt met de z-as, en het oppervlak roteert in de positieve φ-richting. Verder is het cilinderoppervlak zo lang dat u het gemakshalve als *oneindig lang* mag behandelen.

a. Toon aan, met gebruikmaking van symmetrie-overwegingen en de wet van Ampère, dat geldt voor het magnetisch veld van het roterend geladen cilinderoppervlak:

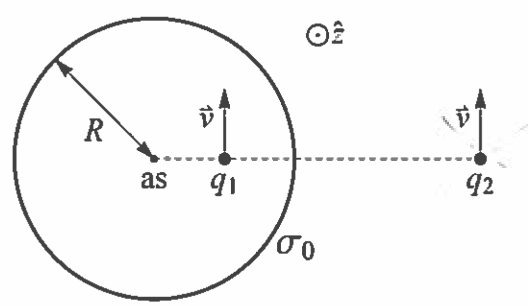
$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0\,\omega\,R\,\sigma_0\,\hat{z} & \text{binnen het cilinderoppervlak} \\ \vec{0} & \text{buiten het cilinderoppervlak} \end{cases}$$

U mag hierbij zonder bewijs gebruiken dat uit de wet van Biot-Savart volgt dat de magnetische veldsterkte tot 0 T nadert op zeer grote afstand van de z-as.
<u>Let op</u>: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redeneringen.

Verder heeft het roterend geladen cilinderoppervlak ook nog een elektrisch veld, waarvan u mag aannemen dat het hetzelfde is als wanneer het oppervlak niet zou roteren, en dus gegeven wordt door (met ρ de afstand tot de z-as):

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{binnen het cilinderoppervlak} \\ \dfrac{\sigma_0\,R}{\epsilon_0}\,\dfrac{\hat{\rho}}{\rho} & \text{buiten het cilinderoppervlak} \end{cases}$$

In een vlak loodrecht op de as van het roterend geladen cilinderoppervlak worden twee puntladingen met dezelfde snelheid $\vec{v}$ weggeschoten.
Lading q_1 wordt weggeschoten vanuit een positie *binnen* het cilinderoppervlak, en lading q_2 vanuit een positie *buiten* het cilinderoppervlak. De beginposities van de ladingen liggen op een lijn die ook door de as van het oppervlak gaat. De snelheid $\vec{v}$ waarmee ze weggeschoten worden staat loodrecht op deze lijn. Neem tenslotte aan dat σ_0, q_1 en q_2 allemaal positief zijn.



In de dwarsdoorsnede van de figuur komt de eenheidsvector $\hat{z}$ loodrecht het papier uit.

b. Maak een schets van de banen die de puntladingen gaan beschrijven.
<u>Let op</u>: U hoeft geen berekeningen uit te voeren, maar geef wel een korte verhelderende toelichting op uw schetsen.