Tentamen Elektromagnetisme
19 april 2016

1a 3

1 { De lading op het rechte lijnstuk is: $q^{rl} = 2R\lambda$.

De lading op de halve cirkelboog volgt door lijnintegratie:

1 { Een lijnelementje opgespannen door een hoekje $d\varphi$ heeft een lengte $R\,d\varphi$. Hierop zit een lading van
$$dq^{hc} = -\lambda \sin\varphi \, d\varphi.$$

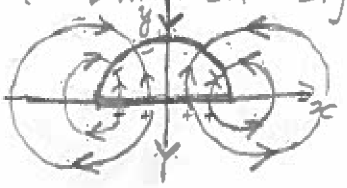
1 { In totaal dus:
$$q^{cb} = \int_0^{\pi} -\lambda \sin\varphi \cdot R\,d\varphi = -2R\lambda.$$

De totale lading is dus $q^{rl} + q^{cb} = 0$.

1b 7

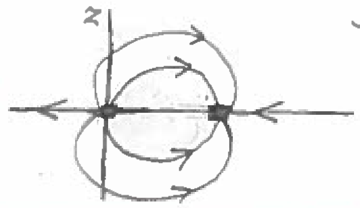
1 { Zulke vlakken zijn spiegelvlakken van de ladingsverdeling

① $\underbrace{z=0}_{1}$



} 2

② $\underbrace{x=0}_{1}$



} 2

1c Veld van de boog: 20

Een lijnelementje op positie $\boxed{\vec{r} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)}$ 1 met lengte $\boxed{dr = \left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| d\varphi = R\,d\varphi}$ 1 veroorzaakt in $\boxed{\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)}$ 1 een elektrisch veld van:

4 {
$$d\vec{E}^{cb} = \frac{-\lambda R \sin\varphi\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$$
$$= \frac{-\lambda R \sin\varphi\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-R\cos\varphi, -R\sin\varphi, z_0)}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

Integreren:

1 {
$$E_x^{cb} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z_0^2)^{3/2}} \int_0^{\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 0$$

1 {
$$E_y^{cb} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z_0^2)^{3/2}} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z_0^2)^{3/2}} \left[\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z_0^2)^{3/2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

1 {
$$E_z^{cb} = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z_0 R}{(R^2+z_0^2)^{3/2}} \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi$$
$$= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z_0^2)^{3/2}} \cdot \frac{2z_0}{R}$$

Veld van het lijnstuk:

Nu is het bronpunt $\boxed{\vec{r} = (x,0,0)}$ 1, het veldpunt $\boxed{\vec{r}_0 = (0,0,z_0)}$ 1 en de grootte van het ladingselementje $\boxed{dq = \lambda dx}$ 1. Dan

4 $$d\vec{E}^{rl}(0,0,z_0) = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-x,0,z_0)}{(x^2+z_0^2)^{3/2}}$$

Integreren:

1 $$E_x^{rl} = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-R}^{+R} \frac{x}{(x^2+z_0^2)^{3/2}} dx = 0 \qquad \text{(oneven functie)}$$

1 $$E_y^{rl} = 0$$

1 $$E_z^{rl} = \frac{\lambda z_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{(x^2+z_0^2)^{3/2}} = \frac{\lambda z_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{x}{z_0^2\sqrt{x^2+z_0^2}} \right]_{-R}^{+R} = \frac{\lambda R}{2\pi\varepsilon_0 z_0 \sqrt{R^2+z_0^2}}$$

De beide uitdrukkingen komen overeen met de gegeven uitdrukkingen.

1d) We zoeken dus een magnetisatie $\vec{\mu}$ waarvoor:

5 1 (1) de equivalente oppervlaktepooldichtheid $-\mathrm{div}\,\vec{\mu} = 0$

1 (2) de equivalente lijnpooldichtheid $\vec{\mu}\cdot\hat{n} = \lambda$ op het rechte lijnstuk en $\vec{\mu}\cdot\hat{n} = -\lambda \sin\varphi$ op de halve cirkelboog.

3 Uit (1) volgt dat $\vec{\mu}$ homogeen is op de halve cirkelschijf. Het is duidelijk dat $\vec{\mu}$ in de $-y$-richting moet liggen om aan (2) te voldoen. Conclusie: $\vec{\mu} = -\mu\hat{y}$.

2 | De ladingsverdeling op een geleider is uniek bepaald.
10 2 Een verdeling die voldoet is dus ook meteen de gevraagde verdeling.

1 – Om te beginnen is $\vec{E} = \vec{0}$ binnen het materiaal van de geleider.

1 – Het veld van puntlading q kan in de geleider opgeheven worden door $-q$ homogeen te verdelen over het oppervlak van de holte.

1 – De geleider bevat dus op zijn buitenoppervlak nog een lading $Q+q$. Door deze homogeen te verdelen over dat oppervlak levert deze geen bijdrage aan het veld er binnen. In de geleider blijft dus $\vec{E} = \vec{0}$.

Nu we weten hoe de lading verdeeld is, bepalen we de veldsterkte:

2 – In de holte: hier draagt alleen puntlading q bij, dus:

$$\vec{E}^{\text{holte}}(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^3}$$

Hier is $\vec{r}$ de vector vanaf het middelpunt van de holte.

1 – In de geleider: $\vec{E}^{\text{geleider}} = \vec{0}$

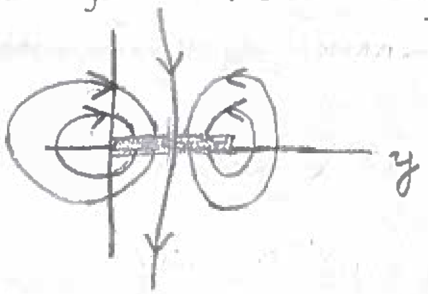
2 – Buiten de geleider: De velden van q in de holte en $-q$ op de holte heffen elkaar buiten de holte overal op. Blijft over het veld van de $Q+q$ homogeen verdeeld over de buitenkant. Dit is volgens het gegevene:

$$\vec{E}^{\text{buiten}} = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|^3}$$

Hier is $\vec{r}'$ de vector vanaf het middelpunt van de bol.

3a | Dit moet een antispiegelvlak zijn : het vlak $x=0$.

(4)



z

3b | Gebruik Biot-Savart

(8)

Hierin is : $\boxed{\vec{r}_0 = (0,0,z_0)}$ 1
$\boxed{\vec{r} = (x,0,0)}$ 1 dus $\boxed{d\vec{r} = (1,0,0)\,dx}$ 1

1 Door in de positieve x-richting te integreren is de stroomsterkte : $-I$.

1 Eerst :

$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & z_0 \end{vmatrix} dx = -z_0\,\hat{y}\,dx$$

2 We vinden dus :

$$d\vec{B}^{rsd}(0,0,z_0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{-z_0\,\hat{y}\,dx}{(x^2+z_0^2)^{3/2}}$$

1 En door integratie :

$$\vec{B}^{rsd}(0,0,z_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\hat{y}\,z_0\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{(x^2+z_0^2)^{3/2}}$$

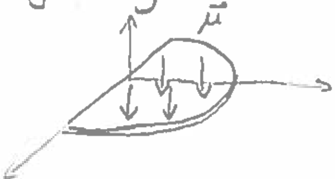
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\hat{y}\,z_0\left[\frac{x}{z_0^2\sqrt{x^2+z_0^2}}\right]_{-R}^{+R}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{R}{z_0\sqrt{R^2+z_0^2}}\,\hat{y}$$

c | 1 Gebruik het equivalentieprincipe van Ampère :

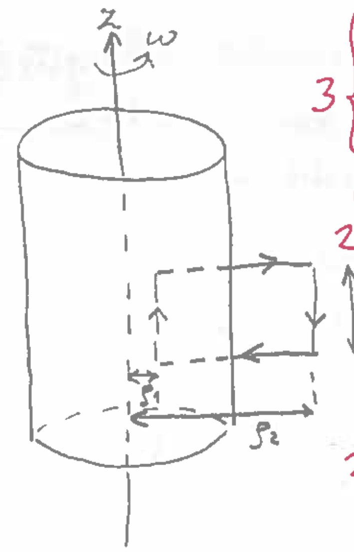
(3)

2 de magneet de equivalent is aan de stroomkring is loodrecht op het vlak van de kring gemagnetiseerd met magnetisatie $\vec{\mu} = -I\hat{z}$.
Het minteken volgt uit de toepassing van de rechterhandregel.



4a

20



3 * spiegelvlakken $z=$ constant
$\longrightarrow$ $\vec{B}$ loodrecht op elk van die vlakken,
dus $\vec{B} = B(\vec{r})\hat{z}$.

2 * translatiesymmetrie // z-as
$\longrightarrow$ $\vec{B}(\vec{r})$ hangt niet van z af,
dus $\vec{B} = B(x,y)\hat{z}$

2 * rotatiesymmetrie voor elke rotatie rond z
$\longrightarrow$ $\vec{B}(\vec{r})$ hangt niet af van φ,
dus $\vec{B} = B(\rho)\hat{z}$.

4 Kies een Ampèrelus zoals geschetst: een rechthoek met een zijde L binnen de cilinder op afstand ρ_1 en een zijde L erbuiten op afstand ρ_2.
De omvatte stroomsterkte is de lading die per seconde door de rechthoek gevoerd wordt: In één omwenteling van $\frac{2\pi}{\omega}$ seconde wordt alle lading in een strook met oppervlakte $2\pi RL$ door de rechthoek gevoerd, dus

$$I_{omvat} = \frac{2\pi RL\sigma_0}{2\pi/\omega} = \omega RL\sigma_0$$

4 Wet van Ampère:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{omvat}$$

$$\oint B(\rho)\hat{z}\cdot d\vec{r} = \mu_0\omega RL\sigma_0$$

$$\int B(\rho_1)\,dz - \int B(\rho_2)\,dz = \mu_0\omega RL\sigma_0$$

(want de horizontale stukken staan $\perp \hat{z}$).

$$\{B(\rho_1) - B(\rho_2)\}L = \mu_0\omega RL\sigma_0$$

2 Laat nu $\rho_2 \to \infty$. Gegeven is dat dan $B_2 \to 0$.
Hieruit volgt:

$$B(\rho_1) = \mu_0\omega R\sigma_0 \qquad (\rho_1 < R)$$

3 Als we $\rho_1 > R$ kiezen dan is $I_{omvat} = 0$. Hieruit volgt

$$B(\rho_1) = 0 \qquad (\rho_1 > R)$$

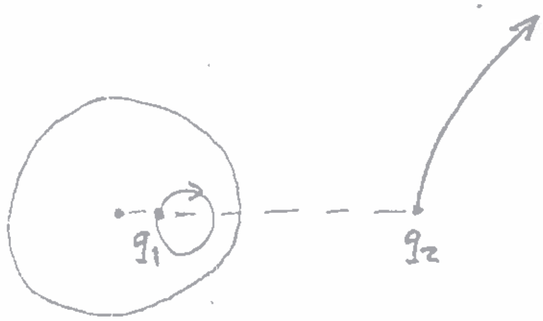
Samengevat:

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \mu_0\omega R\sigma_0\hat{z} & (\rho < R) \\ \vec{0} & (\rho > R) \end{cases}$$

4b) * q_1 ondervindt alleen de Lorentzkracht $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.
Omdat $\vec{B}$ homogeen is, gaat hij een cirkelbaan beschrijven rond de veldlijnen. Rechterhand : rechtsom

* q_2 ondervindt alleen een Coulombkracht $\vec{F} = q\vec{E}$.
Deze kracht is radieel van de cilinder af gericht

(10)



5

5

met bijbehorende toelichting