Tentamen *Elektromagnetisme* (NS-112B)

donderdag 13 april 2017

17:00–20:00 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag gebruik maken van de gegevens in het formuleblad dat samen met het tentamen is uitgedeeld. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Het cijfer wordt bepaald door:

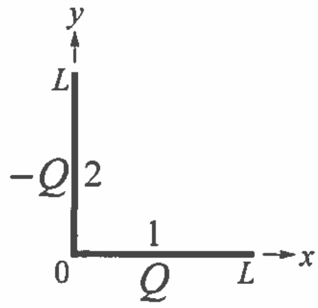
$$\frac{1}{10}\,(10 + \text{aantal behaalde punten})$$

SUCCES!

1 Twee geladen staafjes en magneten

a: 15 b: 10 c: 10 (totaal: 35)

Twee staafjes ter lengte L liggen met één uiteinde tegen elkaar, onder een hoek van 90°. We kiezen het assenstelsel zodanig dat staafje 1 op de x-as ligt, tussen de oorsprong en $(L, 0, 0)$, terwijl staafje 2 op de y-as ligt, tussen de oorsprong en $(0, L, 0)$. Over staafje 1 is een hoeveelheid lading Q gelijkmatig verdeeld; over staafje 2 is een hoeveelheid lading $-Q$ gelijkmatig verdeeld. Hierbij is Q een constante die wordt uitgedrukt in C.



a. Toon aan dat geldt voor het elektrisch veld $\vec{E}^1$ van staafje 1 in het punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$E_x^1(\vec{r}_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x_0-L)^2+y_0^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right\}$$

$$E_y^1(\vec{r}_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{y_0}{(y_0^2+z_0^2)}\left\{\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} - \frac{x_0-L}{\sqrt{(x_0-L)^2+y_0^2+z_0^2}}\right\}$$

$$E_z^1(\vec{r}_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{z_0}{(y_0^2+z_0^2)}\left\{\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} - \frac{x_0-L}{\sqrt{(x_0-L)^2+y_0^2+z_0^2}}\right\}$$

Gegeven: Een primitieve (naar u) van $\frac{1}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\frac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}$.

b. Er geldt als relatie tussen het elektrisch veld van een ladingsverdeling en het elektrisch veld van de ladingsverdeling die middels een rotatie R verkregen wordt uit de oorspronkelijke ladingsverdeling:

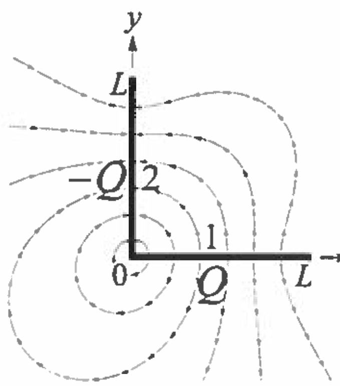
$$\vec{E}^{\,R(\text{lad.verd.})}(R\vec{r}) = R\left(\vec{E}^{\,\text{lad.verd.}}(\vec{r})\right)$$

Bepaal met gebruikmaking hiervan het elektrisch veld $\vec{E}^2$ van staafje 2 in het punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Het elektrisch veld $\vec{E}^{\text{sys}}$ van het systeem van de twee staafjes wordt gegeven door:

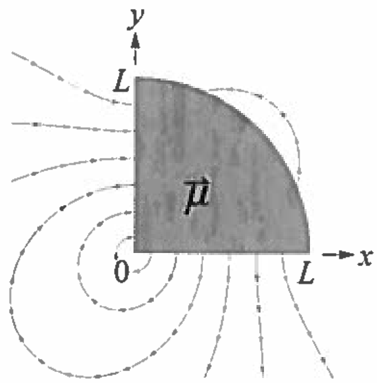
$$\vec{E}^{\text{sys}} = \vec{E}^1 + \vec{E}^2$$

In nevenstaande figuur staat het veldlijnenpatroon van $\vec{E}^{\text{sys}}$ in het xy-vlak weergegeven.



Als we in de uitdrukking voor $\vec{E}^{\text{sys}}$ de volgende substituties maken:

- $\dfrac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0$,
- $Q \rightarrow P$, waarbij P een constante is die wordt uitgedrukt in A m,



dan is de resulterende uitdrukking het magnetisch veld van een in het xy-vlak gelegen platte magneet (meer precies: het veld buiten die magneet).
De magneet heeft de vorm van een kwartschijf (met straal L), en oppervlaktedipooldichtheid $\vec{\mu}$.

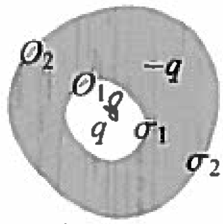
c. Geef de oppervlaktedipooldichtheid $\vec{\mu}$ van de magneet, en licht uw antwoord toe.
   Let op: U hoeft *niet* expliciet aan te tonen dat de door u beschreven magneet inderdaad aanleiding geeft tot een magnetisch veld van dezelfde wiskundige vorm als $\vec{E}^{\text{sys}}$. Het volstaat om een uitdrukking te geven van de magnetisatie $\vec{\mu}$, met een toelichting en een verhelderende tekening.

2 Geleiders

a: 5 b: 5 c: 10 (totaal: 20)

a. Toon aan dat zich nergens in het inwendige van een drie-dimensionale geleider netto lading kan bevinden.

Een neutrale geleider bevat een holte. Vervolgens wordt een hoeveelheid lading q van de geleider afgehaald en op een vaste plaats in de holte vastgehouden. De totale lading op de geleider zelf is dan dus $-q$.
In de figuur is een dwarsdoorsnede ter hoogte van de holte afgebeeld. Bedenk echter dat de geleider de holte volledig omhult. Noem O_1 het gesloten oppervlak dat de binnenrand van de geleider vormt, dus dat de holte omsluit. Noem O_2 het gesloten oppervlak dat de buitenrand van de geleider vormt.



Volgens het gestelde in onderdeel a) bevindt zich op de geleider eventueel alleen netto lading op O_1 en O_2. Veronderstel dat in de beschreven situatie de oppervlakteladingsdichtheid op O_1 gegeven wordt door $\sigma_1(\vec{r})$ en de oppervlakteladingsdichtheid op O_2 door $\sigma_2(\vec{r})$.

b. Leg uit dat geldt:

   (i) $\oint_{O_1} \sigma_1(\vec{r})\, \mathrm{d}O \;=\; -q$

   (ii) $\oint_{O_2} \sigma_2(\vec{r})\, \mathrm{d}O \;=\; 0$

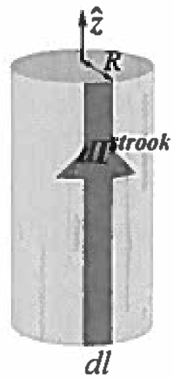
c. Leg uit dat in de hiervoor beschreven situatie geldt dat zich nergens op de buitenrand netto lading bevindt: $\sigma_2(\vec{r}) = 0$ voor alle $\vec{r} \in O_2$.

<u>Hint</u>: Beschouw eerst de volgende situatie:

- Een geleider met totale lading $-q$ bevat een holte van dezelfde omvang en vorm als de hiervoor beschreven geleider.
- In de holte bevindt zich een hoeveelheid lading q die op dezelfde manier op dezelfde plaats vastgehouden wordt.
- Het verschil met de hiervoor beschreven situatie is dat nu de geleider zich buiten de holte in alle richtingen oneindig ver uitstrekt.

3 Een stroomvoerend cilinderoppervlak

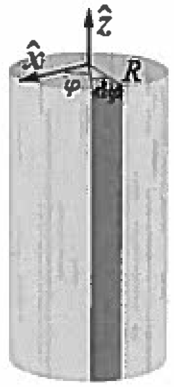
a: 10 b: 12 c: 8 d: 5 (totaal: 35)



Beschouw een cilinderoppervlak met straal R. Het cilinderoppervlak is zo lang, dat het gemakshalve als *oneindig lang* opgevat kan worden. We kiezen het assenstelsel zodanig dat de as van het oppervlak samenvalt met de z-as. In de lengterichting van het oppervlak loopt een gelijkmatige oppervlaktestroom $\vec{K} = K\hat{z}$. Dat wil zeggen dat iedere strook van het oppervlak met breedte $\mathrm{d}l$ in de z-richting een stroom $\mathrm{d}I^{\,\mathrm{strook}}$ voert die gegeven wordt door:

$$\mathrm{d}I^{\,\mathrm{strook}} = K\,\mathrm{d}l$$

Hierbij is K is een constante die wordt uitgedrukt in $\mathrm{A\,m^{-1}}$.



a. Toon aan, met behulp van de wet van Biot-Savart, dat geldt voor de bijdrage aan het magnetisch veld $\vec{B}^{\,[\varphi,\varphi+\mathrm{d}\varphi]}$ van de strook tussen de hoeken φ en $\varphi+\mathrm{d}\varphi$ in het punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\vec{B}^{\,[\varphi,\varphi+\mathrm{d}\varphi]}(\vec{r}_0) =$$

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{K\,R\,\mathrm{d}\varphi}{\left\{(x_0 - R\cos\varphi)^2 + (y_0 - R\sin\varphi)^2\right\}}\begin{pmatrix} R\sin\varphi - y_0 \\ x_0 - R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Gegeven</u>: Een primitieve (naar u) van $\frac{1}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\frac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}$.

Met behulp van het superpositiebeginsel volgt voor het magnetisch veld $\vec{B}^{\,\mathrm{co}}$ van het gehele stroomvoerende oppervlak:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{co}}(\vec{r}_0) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\; \vec{B}^{\,[\varphi,\varphi+\mathrm{d}\varphi]}(\vec{r}_0)$$

De betreffende integraal kan met enige moeite geëvalueerd worden. Er volgt voor het veld in het punt $\vec{r}_0 = (\rho_0\cos\varphi_0, \rho_0\sin\varphi_0, z_0)$:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{co}}(\vec{r}_0) = \begin{cases} \vec{0} & \text{als } \rho_0 < R \\[2ex] \dfrac{\mu_0 R K}{\rho_0}\begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{als } \rho_0 > R \end{cases} \tag{1}$$

Het voorgaande resultaat kan ook op een eenvoudiger manier afgeleid worden, met behulp van symmetrie-redeneringen en de wet van Ampère.

b. Toon met behulp van symmetrie-overwegingen aan dat geldt voor het magnetisch veld in het punt $\vec{r}_0 = (\rho_0 \cos\varphi_0, \rho_0 \sin\varphi_0, z_0)$ van het stroomvoerende cilinderoppervlak:

$$\vec{B}(\vec{r}_0) \;=\; f(\rho_0)\,\hat{\varphi}_0$$

Hierbij is $\hat{\varphi}_0$ de eenheidsvector in de φ-richting bij $\vec{r}_0$: $\hat{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Verder is f een nog onbepaalde functie, die met symmetrie-redeneringen niet nader te bepalen is.

c. Toon (1) aan met gebruikmaking van de wet van Ampère.

Beschouw tenslotte een geladen deeltje in het gebied *buiten* het cilindrisch stroomoppervlak ($\rho > R$, met ρ de afstand tot de as van de cilinder).

d. Is het mogelijk het deeltje zodanig weg te schieten dat het daarna met een constante snelheid rechtdoor blijft bewegen? Licht uw antwoord kort toe.