Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-103b werd in 2004/2005 gegeven door prof. dr. C.J. Erkelens.

Elektromagnetisme (NS-103b)
20 april 2005

Opgave 1

a) $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{\text{omvat}}$, dus voor pad A levert dat $5\mu_0$ en voor pad B levert dat 0 op.

b) Niets.

c) Uit rotatie, translatie en spiegelsymmetrie blijkt dat het veld tangentieel gericht is en dat het op een gegeven afstand r overal even groot is. Kies daarom als integratiepad een cirkel in het vlak loodrecht op de draad, straal r en concentrisch met de draad. Het inproduct in de integraal is nu eenvoudig uit te rekenen:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{omvat}}, \;\; B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

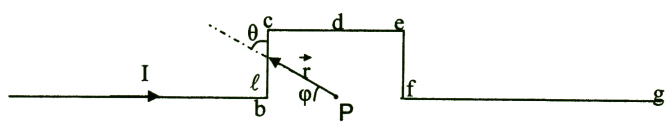
d) Ampère levert hier niets op door gebrek aan symmetrie.

e) Gebruik Biot Savart: $\mathrm{d}\vec{B} = \mu_0 \dfrac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$. Voor de rechte draadeinden geldt steeds $\mathrm{d}\vec{\ell} \times \hat{r} = 0$, waardoor de veldbijdrage nul is. Voor de halve draadcirkel geldt: r constant en $\mathrm{d}\vec{\ell} \times \hat{r} = \mathrm{d}\ell$, dus

$$\vec{B} = \mu_0 I \int \frac{\mathrm{d}\vec{\ell} \times \hat{r}}{4\pi r^2} = \mu_0 I \frac{1}{4\pi r^2} \int \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I \frac{1}{4\pi r^2} \pi r = \frac{\mu_0 I}{4r}$$

(= de helft van het veld in het middelpunt van een hele draaicirkel met stroom I).

f)



De bijdrage van de a–b is weer nul. De bijdrage van b–c is gelijk aan c–d, is gelijk aan d–e, is gelijk aan e–f, en de bijdrage van f–g is nul. De bijdrage van b–c bedraagt:

$$\begin{aligned}
B_{bc} &= \mu_0 I \int_0^R \frac{\mathrm{d}\vec{\ell} \times \hat{r}}{4\pi r^2} = \mu_0 I \int_0^R \frac{\sin\theta}{4\pi r^2} \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I \int_0^R \frac{\cos\varphi}{4\pi\left(R^2+\ell^2\right)} \mathrm{d}\vec{\ell} \\
&= \mu_0 I \int_0^R \frac{R}{4\pi\left(R^2+\ell^2\right)\sqrt{R^2+\ell^2}} \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I R}{r\pi} \frac{1}{R^2} \left[\frac{\ell}{\sqrt{R^2+\ell^2}}\right]_0^R \\
&= \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{1}{R^2} \frac{R}{\sqrt{R^2+R^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi R}
\end{aligned}$$

Opgave 2

a) $\mathrm{J} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{A}} = \frac{1.92}{10^{-3}} = 1.92 \times 10^3 \mathrm{A/m}^2$.

$\vec{J} = n q_e \vec{v}_d$.

Op de positieve y-as:

$$v_d = \frac{1.92 \cdot 10^3}{-1.60 \cdot 10^{-19} \cdot 1.2 \cdot 10^{23}} = -0.1 \text{ m/s; dit is naar rechts.}$$

De driftsnelheid is dus 0.1 m/s tegen de stroom in (en met de klok mee).

b)

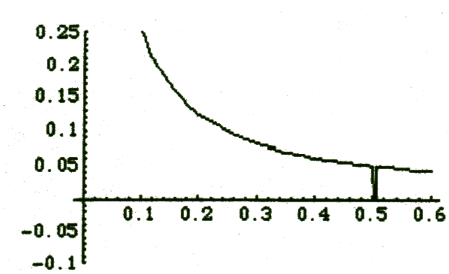
$$\vec{E}_H = -\vec{v}_d \times \vec{B}; \quad E_H = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05 \text{ V/m}.$$

De richting van E_H is naar de z-as, d.w.z. pluslading aan de buitenkant en minlading aan de binnenkant van de ring.

c) Uit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ haal je voor de grootte van $\vec{\omega}$ dat $|om\vec{e}ga| = 0.1/0.5 = 0.2$ rad/s. De ring draait tegen de klok in.

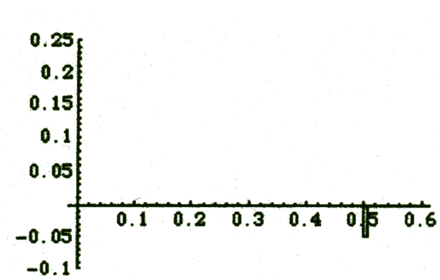
d) Het E-veld t.g.v. de lijnlading:

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2.5 \cdot 10^{-3}}{r} \text{ V/m} &&\text{als } r < R \text{ en } r > R + d; \\ E_L &= 0 &&\text{als } R < r < R + d; \end{aligned}$$

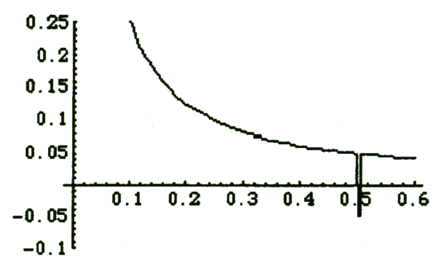


Het Hall-veld:

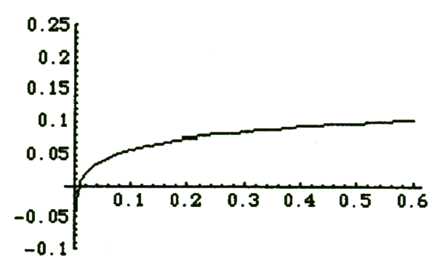
$$\begin{aligned} E_H &= 0 &&\text{als } r < R; \\ E_H &= -0.05 \text{ V/m} &&\text{als } R < r < R + d; \\ E_H &= 0 &&\text{als } r > R + d; \end{aligned}$$



$E_{\text{totaal}} = E_L + E_H$



V



e) Het B-veld t.g.v. de stroomkring:

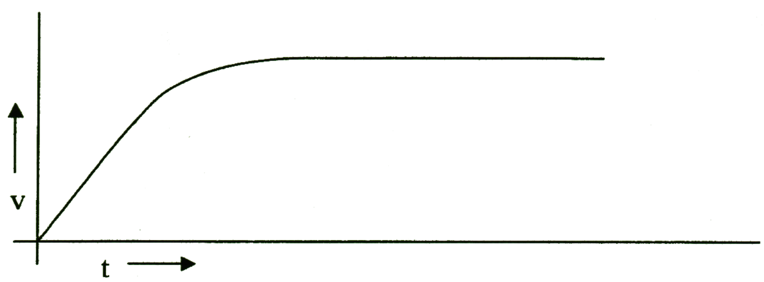
$$\begin{aligned}
\vec{B}_{\text{kring}} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I}{r^2}\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int R\mathrm{d}\varphi\hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}2\pi R\hat{z} = \mu_0\frac{I}{2R}\hat{z} \\
B_z &= 2.41\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T} \\
\vec{B}_{\text{totaal}} &= \vec{B}_{\text{kring}} + \vec{B}_{\text{ext}} = 2.41\cdot 10^{-6}\hat{z} - 0.5\hat{z} \approx -0.5\hat{z}\ \mathrm{T}
\end{aligned}$$

Opgave 3

a) De staaf versnelt naar links.

$$F_l = I\ell B = ma \qquad a = \frac{I\ell B}{m} \qquad v(t) = \frac{I\ell Bt}{m}$$

b) De grafiek:



In het begin is er alleen de EMK van de batterij, de stroom bedraagt dan $I = \mathrm{EMK}_{\text{batt}}/R$. Daardoor ontstaat er een kracht $F_l = B\ell I$ die de staaf een versnelling geeft. Naarmate de snelheid toeneemt wordt een steeds grotere, tegengesteld gerichte EMK geïnduceerd in de lus. De stroom bedraagt nu $I = (\mathrm{EMK}_{\text{batt}} + \mathrm{EMK}_{\text{ind}})/R$. De snelheid neemt verder toe totdat $\mathrm{EMK}_{\text{batt}} + \mathrm{EMK}_{\text{ind}} = 0$.

c) De nettokracht op de staaf is dan nul, de enige kracht op de staaf is de Lorentzkracht, dus:

$$F_l = B\ell I = 0 \qquad I = 0.$$

d) De staaf bereikt een constante snelheid zodra $\mathrm{EMK}_{\text{batt}} - \mathrm{EMK}_{\text{ind}} = 0$, dus:

$$\begin{aligned}
\mathrm{EMK}_{\text{batt}} &= -\mathrm{EMK}_{\text{ind}} = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = v_e\ell B \\
v_e &= \frac{\mathrm{EMK}_{\text{batt}}}{\ell B}
\end{aligned}$$