Uitwerkingen Tentamen ELE (NS-103b), 16 april 2008

fouten voorbehouden

Opgave 1

a Het zwaartepunt van de pluslading Q ligt bij $x = \frac{1}{2}$. Het zwaartepunt van de minlading $-Q$ ligt bij $x = -\frac{1}{2}$ De afstand tussen beide bedraagt dus a en de grootte van het dipoolmoment is $p = Qa$.

b Het yz-vlak is een antisymmetrievlak van de ladingsverdeling, het veld in punten van dat vlak staat dus loodrecht op het vlak: $E_y = 0$.

c Te berekenen blijft de x-component. Voer een hoek ϕ in als volgt: 

. Beschouw de veldbijdrage in het punt $p(y)$ van een ladingselement $dq = \frac{Q}{a}dx$:

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\frac{1}{x^2+y^2}\sin\phi dx = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Integreer over de positieve ladingshelft:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\int_0^a \frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{y^2}}\right)$$

De bijdrage van het negatieve ladingsstuk is even groot en gelijk gericht:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{a}\int_{-a}^0 \frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-a}^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)$$

Tenslotte optellen:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)$$

d Herschrijf:$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\frac{1}{y}\left(1 - \left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{-1/2}\right)$. Substitueer $\epsilon = a^2/y^2$. Voor grote y geldt dan $\epsilon \ll 1$, zodat we de laatste term kunnen taylor-ontwikkelen als: $(1+\epsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \ldots$. Alles invullen levert: $E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qa}{y^3}$

Opgave 2

a Beschouw eerst een enkele winding. De krachten op beide draadlengtes b zijn even groot en tegengesteld gericht langs het vlak van de draadlus. Deze leveren dus geen koppel. De krachten op beide draadlengtes a zijn ook gelijk van grootte en tegengesteld gericht, parallel aan de x-as, met grootte $F = IBa$. De geprojecteerde armlengte is $\frac{1}{2}b\sin\phi$, dus het draaimoment op een arm is: $\tau_{1/2} = IBa\frac{1}{2}b\sin\phi$. Met $A = ab$ wordt de totale draaimoment tgv. beide armen: $\tau_1 = IAB\sin\phi$. Bij een draadraam met N windingen wordt het totale draaimoment: $\tau = NIAB\sin\phi$.

b Iedere willekeurige vlakke draadlus met stroom I kan worden samengesteld uit N infinitesimaal smalle, rechthoekige draadramen, met ieder een dipoolmoment IA_n. Het totale draaimoment op de draadlus zal gelijk zijn aan de som van de draaimomenten op de rechthoeken $\sum IA_nB\sin\phi = IB\sin\phi\sum A_n$.

Opgave 3

a Het veld rond de binnencilinder heeft cilindersymmetrie, en is dus radieel gericht ten opzichte van de z-as. Kies als gaussoppervlak een koektrommel concentrisch om de binnencilinder met straal r en lengte l, dan gaat er alleen een veldflux door de mantel. Deze is uniform en staat loodrecht op het oppervlak geldt: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E2\pi rl = \frac{Q_{omv}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$, met $\lambda = Q/L$. De totale lading Q op de binnencilinder bedraagt $Q(t) = It$. Hieruit volgt het E-veld als functie van de tijd: $E(t) = \frac{It}{2\pi\epsilon_0 rL}$.

1

b Het veld is radieel gericht, dus het potentiaalverschil tussen binnen- en buitenmantel bij een gegeven condensatorlading Q volgt met:

$$\int_{R_A}^{R_B} E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_{R_A}^{R_B}\frac{1}{r}dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\lfloor \ln r \rfloor_{R_A}^{R_B} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

De capaciteit C volgt met:

$$C = \frac{Q}{V} = 2\pi\epsilon_0 L \ln\frac{R_A}{R_B}$$

c De stroomverdeling is cilindersymmetrisch rond de z-as. Ieder vlak dat opgespannen wordt door de z-as is dus een symmetrievlak van de stroomverdeling. Het B-veld staat daar loodrecht op, en heeft dus alleen een tangentiële component rond de z-as. Kies daarom als Ampèrelus een cirkel concentrisch met de z-as. Dan geldt $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\left(I_{omsl} + \epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right)$. Beschouw een vlak Ampèreoppervlak met de genoemde rand. De elektrische flux door dit oppervlak is 0. De lading verspreidt zich uniform over de binnencilinder. De grootte van de omvatte stroom hangt dus af van de positie van de Ampèrelus op de z-as. Met $z = 0$ bij de voorrand van de condensator geldt $I_{omsl} = I\frac{L-z}{L}$, zodat voor de grootte van B geldt: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{L-z}{L}$.

d De aangegeven Ampèrelus omvat geen stroom, alleen een veranderend E-veld. Het veld staat loodrecht op het aangegeven Ampèreoppervlak en is over het hele oppervlak even sterk. Als je de oriëntatie van het oppervlak naar buiten gericht kiest geldt $\Phi_E(t) = AE(t)$. Het oppervlak $A = \frac{1}{2}\pi r\ell$, dus $\Phi_E(t) = \frac{It\pi r\ell}{4\pi\epsilon_0 rL}$, en $\frac{\Phi_E}{dt} = \frac{I\ell}{4\epsilon_0 L}$. Het B-veld is tangentieel gericht, waardoor alleen de de gebogen 'voor-' en 'achterrand' van de Ampèrelus een bijdrage leveren aan de pad-integraal. Het veld staat hier parallel aan het pad en is over het hele pad even sterk. Kies de omloopszin voor de pad-integratie overeenkomstig de oriëntatie van het oppervlak. Bij de gegeven oriëntatie van het oppervlak loop je op de voorrand van het Ampèreoppervlak met het veld mee, en op de achterrand tegen het veld in, zodat geldt: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2}\pi r B(z) - \frac{1}{2}\pi r B(z+\ell)$. Invullen levert: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I\ell}{4L} = \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$, waarmee het gevraagde bewezen is.

Opgave 4

a Ieder vlak dat loodrecht op de as van de solenoïde is een symmetrievlak van de stroomverdeling. Het B-veld staat loodrecht op zo'n vlak, en is dus gericht parallel aan de as van de solenoïde. Uit translatiesymmetrie langs de as volgt dat het veld in die richting uniform is. Kies een rechthoekinge Ampèrelus met één zijde (lengte ℓ) in de solenoïde parallel aan de as; twee zijden loodrecht daarop die doorlopen tot in oneindig en in de laatste zijde in oneindig, parallel aan de as. Op grote afstand van de as zal het veld van de solenoïde bij benadering gelijk zijn aan het veld van een rechte draad, dus voor zeer grote r nadert dit tot nul. De lange zijden staan loodrecht op het B-veld en leveren dus een bijdrage 0. De zijde binnen de solenoïde staat parallel aan het veld. De wet van Ampère vereenvoudigt dus tot: $B\ell = \mu_0 I_{\text{omsl}} = \mu_0 In\ell$ Er geldt dus: $B(t) = \mu_0 I_0 n \sin\omega t$. Dit geldt onafhankelijk van de precieze ligging van het integratiepad binnen de spoel; het veld is dus uniform binnen de spoel.

b Het veld dat door de tweede spoel omvat wordt is uniform en staat parallel aan de as. De geïnduceerde EMK in in de spoel is N keer de EMK in één winding: $\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$. $\frac{d\Phi_B}{dt} = A\frac{dB}{dt} = \pi r_2^2\mu_0 I_0 n\omega\cos\omega t$, dus $\mathcal{E} = -N\pi r_2^2\mu_0 I_0 n\omega\cos\omega t$.

c De wederzijdse inductie volgt met $\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt}$. De tijdsafgeleide van de stroom is $\frac{di_1}{dt} = I_0\omega\cos\omega t$. Invullen levert: $M = \mu_0 N n\pi r_2^2$. Omdat $M_{12} = M_{21}$ maakt het niet uit welke spoel de stroom voert. De geïnduceerde EMK in de andere spoel is in beide gevallen gelijk, dus: $\mathcal{E} = -N\pi r_2^2\mu_0 I_0 n\omega\cos\omega t$.

2