Tentamen Golven en Optica

woensdag 29 juni 2011, 15.00-18.00 uur

- Maak elke opgave op een **apart** vel voorzien van uw naam en studentnummer.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Verdeel uw tijd optimaal over de opgaven.

Opgave 1. Golven en polarisatie op een snaar (3 punten)

We beschouwen lopende golven op een oneindig lange, ideale snaar (massa per lengte eenheid μ) opgespannen langs de x-as met spankracht F. De uitwijking in de y-richting wordt gegeven door $y(x,t) = A\cos(k(x - vt))$. Behalve deze lopende golf loopt er op de snaar in dezelfde richting ook een golf met uitwijking in de z-richting. Deze wordt gegeven door $z(x,t) = A\sin(k(x - vt))$. We beschouwen deze samengestelde golf.

a) Geef op elk tijdstip en voor elk punt op de snaar de uitwijking als een drie-dimensionale vector. Schets de vorm van de snaar op $t = 0$. Geef met een pijl aan in welke richting de golf loopt.

(b) Is er bij deze samengestelde golf ook sprake van een golflengte? Indien ja, hoe groot is deze dan? Indien nee, waarom niet?

(c) Waarom is de samengestelde golf een transversale golf?

(d) Geef voor de grootheden A, v en k aan of je die vrij kunt kiezen voor deze opgespannen snaar. (F en μ liggen dus vast)

(e) Geef op elk tijdstip en voor elk punt op de snaar de snelheid als een drie-dimensionale vector. Bereken vervolgens de grootte van die snelheidsvector en laat zien dat de kinetische energie per lengte-eenheid gelijk is aan $\frac{1}{2}FA^2k^2$, dus onafhankelijk van x en t.

De (elastische) potentiële energie voor een stukje opgespannen snaar met lengte L_0 dat als gevolg van de golf wordt uitgerekt tot lengte L is gelijk aan $F(L - L_0)$.

(f) Geef de exacte lengte L van een stuk snaar waarop deze golf loopt in termen van L_0, A en k. Laat vervolgens zien, met de benadering $Ak \ll 1$, dat de potentiële energie per lengte-eenheid gelijk is aan $\frac{1}{2}FA^2k^2$.

We laten de inkomende golf nu reflecteren aan een vast punt, de oorsprong. De golf, en dus ook de snaar, bestaat dus alleen voor $x \leq 0$.

(g) Geef, voor elk punt met $x \leq 0$, de uitdrukking voor de uitwijking van deze snaar als functie van de tijd. Dit is dus een drie-dimensionale vector. Vereenvoudig zowel de uitwijking in de y- als in de z-richting en beschrijf kort, maar wel in detail, hoe deze samengestelde golf zich gedraagt als functie van x en t. Illustreer deze situatie eventueel met een schets.

(h) Bereken voor een willekeurig punt de grootte van de snelheidsvector als functie van x en t. Laat in het bijzonder zien dat deze niet van t maar wel van x afhangt. Laat tot slot zien dat de plaats-gemiddelde kinetische energie per lengte-eenheid gelijk is aan FA^2k^2. Dit is, zoals te verwachten, het dubbele van het antwoord op (e).

(i) **Bonus:** Bereken de potentiële energie per lengte-eenheid en laat zo zien dat de energie per lengte-eenheid overal en altijd constant is.

Opgave 2. Geluid en anti-geluid (2 punten)

Beschouwen een geluidsbron in de oorsprong die in alle richtingen geluid van 680 Hz produceert. Op 10 m van de bron is het geluidsniveau 120 dB. De geluidssnelheid is 340 m/s.

(a) Bereken de drukamplitude van deze golf op 10 m van de bron en op 5 m van de bron. Gebruik $B = 1.4 \times 10^5$ Pa.

(b) Bereken het akoestisch vermogen van deze geluidsbron.

Een waarnemer op 10 m afstand van deze bron heeft hinder van dit geluid. Derhalve laat hij halverwege de bron en zichzelf een tweede bron plaatsen die eveneens in alle richtingen geluid uitzendt. Er mag worden aangenomen dat het geluid van de eerste bron hierdoor niet wordt verstoord. De waarnemer hoort nu niets meer.

(c) Wat is de relatie tussen de fase van het geluid geproduceerd door deze twee bronnen?

(d) Hoe groot is het akoestisch vermogen van deze tweede bron.

De waarnemer verplaatst zich in een richting loodrecht op de lijn tussen beide bronnen.

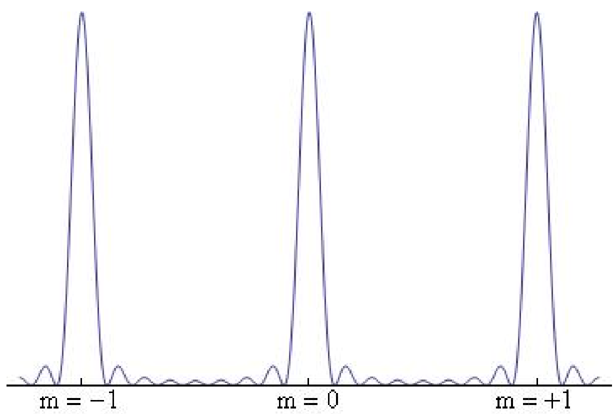
(e) Hoever moet hij zich verplaatsen opdat het geluid dat hij waarneemt uit beide bronnen voor het eerst in fase is? Je mag hier benaderingen maken. Hoe groot is in dat geval de afstand van de waarnemer tot bron 1 min zijn afstand tot bron 2?

Opgave 3. Tralie (3 punten)

De intensiteitsverdeling van een systeem van N spleten met verwaarloosbare breedte wordt met onderstaande vergelijking beschreven:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)^2, \qquad \alpha = \frac{kd}{2} \sin(\theta)$$

met N het aantal spleten, I_0 de intensiteit van een individuele spleet, d de afstand tussen de spleten en θ de afbuighoek. Als een vlakke monochromatische golf met golfgetal k op deze spleten valt, is op een scherm het volgende Fraunhofer diffractiepatroon zichtbaar.



(a) Door hoeveel spleten is bovenstaand diffractiepatroon geproduceerd?

(b) Hoe groot is de maximale intensiteit van het diffractiepatroon van dit N-spleten systeem?

(c) Bij welke afbuighoeken heeft het bovenstaande diffractiepatroon minima?

(d) Het chromatisch scheidend vermogen R is gedefinieerd als $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. Leid de uitdrukking $R = Nm$ af voor het chromatisch scheidend vermogen van een N-spleten systeem

Dit N-spleten systeem wordt belicht door een gepulste laser met een pulsbreedte van 4×10^{-15} s en een golflengte $\lambda = 600$ nm. Ga er vanuit dat de laserpuls loodrecht invalt en beschreven kan worden als een vlakke electromagnetische golf met een geheel aantal sinusvormige oscillaties met dezelfde periode.

(e) Bereken het aantal oscillaties in één laserpuls.

(f) Bereken de kleinste afbuighoek waarboven interferentie-effecten **niet** optreden.

(g) Wat is de hoogste orde van het interferentie hoofdmaximum dat waargenomen kan worden?

(h) Waarom hebben de hoofdmaxima met $m = \pm 1$ een andere maximale intensiteit dan het centrale hoofdmaximum?

(i) Hoe groot is de waargenomen pulsbreedte (in s) van het centrale hoofdmaximum, en hoe groot is die voor de hoofdmaxima met $m = \pm 1$?

Opgave 4. Polarisatie en Brewster condities (2 punten)

We beschouwen de overgang tussen twee oneindig dikke media met brekingsindices n_i en n_t ($n_t > n_i$). Een bundel ongepolariseerd licht met golflengte λ valt vanuit het medium met brekingsindex n_i in op dit grensvlak onder een hoek θ_i met de normaal op het grensvlak. De hoek van de doorgaande bundel met de normaal noemen we θ_t.

(a) Welke waarde heeft de golflengte van dit licht na breking aan het grensvlak? Welke frequentie heeft het licht na breking?

Wanneer ongepolariseerd licht invalt onder de Brewsterhoek θ_p (dus als $\theta_i = \theta_p$) is het gereflecteerde licht 100%. gepolariseerd.

(b) De Brewsterhoek voor licht dat vanuit het medium met brekingsindex n_t op het grensvlak valt noemen we θ_q. Laat zien dat de twee Brewsterhoeken θ_p en θ_q complementair zijn, d.w.z. $\theta_p + \theta_q = 90°$. (Je mag hiervoor Brewster's wet gebruiken, zie formuleblad)

(c) Wat kun je zeggen over de polarisatietoestand van de doorgaande lichtbundel als een invallende bundel circulair gepolariseerd licht invalt onder de Brewsterhoek?

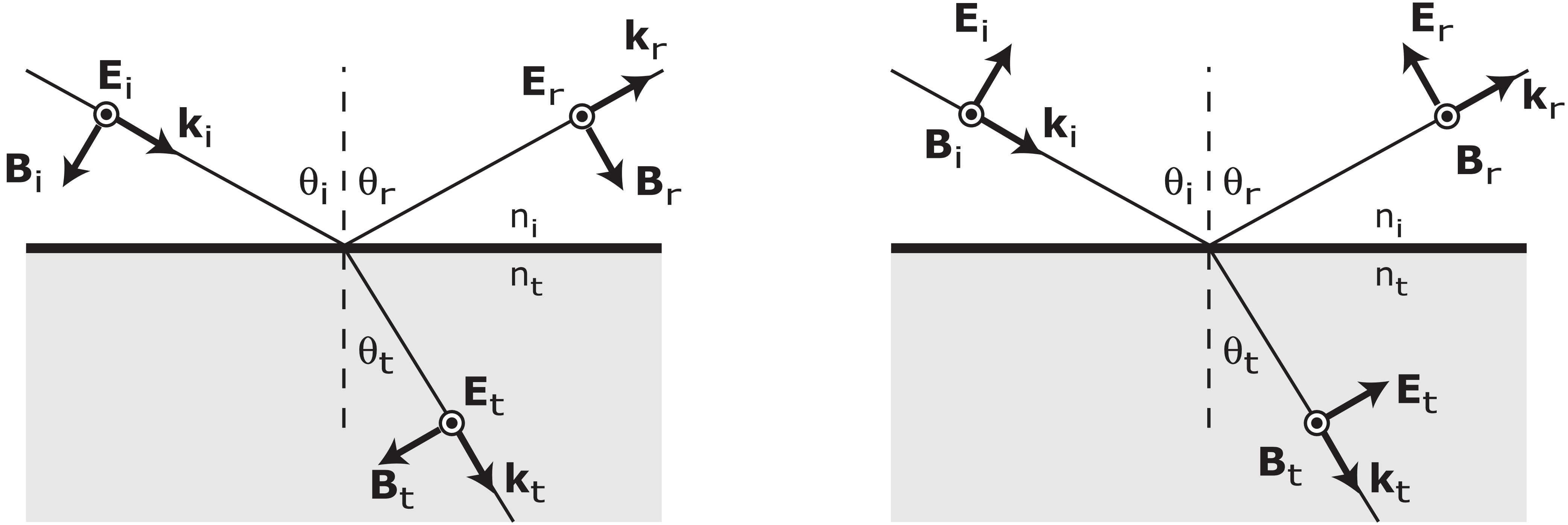
De ellipticiteit e van een elliptisch gepolariseerde lichtbundel is gedefinieerd als de verhouding van de amplitudes van de twee lineaire polarisatie richtingen waarin de lichtbundel ontbonden kan worden: $e = A_1/A_2$, waarbij A_1 de kleinere van de twee amplitudes is. De reflectie en transmissie van de amplitudes van loodrecht en parallel gepolariseerd licht wordt gegeven door de Fresnelvergelijkingen, zie hiervoor het schema op de volgende pagina.

(d) Een elliptisch gepolariseerde lichtbundel met golflengte λ en ellipticiteit 1 valt vanuit het medium met brekingsindex n_i onder de Brewster hoek in op het grensvlak. Toon aan dat de ellipticiteit van de doorgaande bundel geschreven kan worden als:

$$e = \frac{2}{n_i/n_t + n_t/n_i}.$$

loodrecht gepolariseerd

Parallel gepolariseerd



$$r_s \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} \qquad r_p \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t}$$

$$t_s \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} \qquad t_p \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t}$$