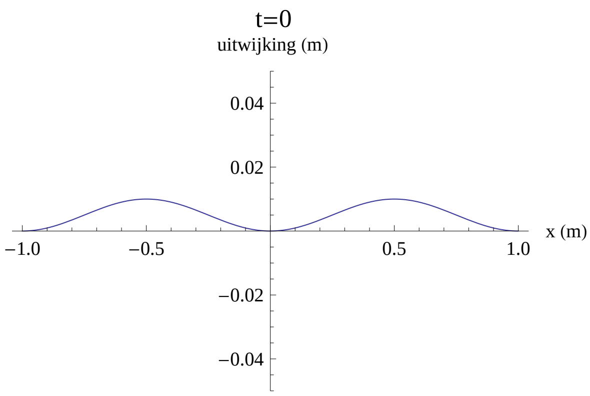
Tentamen Golven & *Optica* (NS-104B)

30 juni 2010, 3 uur

- ***Maak elke opgave op een apart vel en voorzie die van naam en studentnummer***
- ***Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, gebruik van internet is verboden***
- ***Verdeel uw tijd optimaal over de vier opgaven***

Opgave 1: Golven op een koord (2.5 punt)

Een stevig koord met een dwarsdoorsnede van $1\ \text{mm}^2$ en met een lengte van 2 m is opgespannen met een spankracht van 400 N. Het is bevestigd aan twee vaste punten op $x = -1$ m en op $x = 1$ m. Het koord weegt 5 gram. Op $t = 0$ ziet de vorm van het koord er als volgt uit:



Voor punten $x\in[-1,1]$ is de uitwijking op $t = 0$ gegeven door de formule $y_0(x) = A \sin^2(\pi x)$, met $A = 0.01$ m, waarbij x wordt gegeven in meter. Demping als gevolg van wrijving wordt verwaarloosd. Het is een ideaal koord dat voldoet aan de golfvergelijking; alle punten op het koord bewegen alleen loodrecht op de *x*-as!

Verder is gegeven dat het opgezette (golf)patroon op $t = 0$ in de richting van de positieve *x*-as beweegt. (Vraag niet hoe dat voor elkaar is gekregen.)

a) Bereken de snelheid v van lopende golven op dit koord.

b) Hoe hoog is de frequentie van het geluid dat dit koord veroorzaakt doordat het de omringende lucht in beweging brengt?

c) Geef een algemene uitdrukking voor de totale kinetische energie van dit koord als functie van de tijd. Hierin komt dus $y(x, t)$ en/of zijn partiële afgeleiden voor. Je hoeft de golfvergelijking hier dus niet op te lossen.

d) Geef de functie $y_L(x, t)$, de uitwijking van een lopende golf die met snelheid v in de +*x*-richting loopt, en die op $t = 0$ gelijk is aan de gegeven uitwijking $y_0(x)$. Bereken hiermee de kinetische energie van het koord (in J) op $t = 0$. Noem deze energie E_k. Is op t=0 de kinetische energie in de linkerhelft van het koord gelijk aan die in de rechterhelft van het koord?

e) Schets de vorm van het koord op $t = \frac{T}{8}$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{3T}{8}$ en $t = \frac{T}{2}$, waarbij T de tijd is waarop de vorm van het koord voor het eerst weer hetzelfde is als op $t = 0$. **Hint**: Maak onderscheid tussen het gedrag bij $x = -1$ en bij $x = 1$.

f) Leg uit waarom op $t = \frac{T}{4}$ de potentiële (elastische) energie in het koord gelijk is aan nul. Bepaal vervolgens op $t = \frac{T}{4}$ de kinetische energie van zowel de linker als de rechterhelft van het koord in termen van E_k. **Hint**: Vergelijk voor elk punt van het koord de verticale snelheid op $t = 0$ met die op $t = \frac{T}{4}$.

g) Bepaal tot slot de kinetische energie op $t = \frac{T}{8}$.

Opgave 2: Geluidsintensiteit (2.5 punt)

Een bolvormige geluidsbron met een straal van 0.2 m geplaatst in lucht met $B = 1.42 \times 10^5$ Pa en $\rho = 1.20\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ zendt in alle richtingen sinusvormige geluidsgolven uit met een frequentie van 440 Hz. Op 10 m van de bron is het waargenomen geluidsniveau 70 dB. De verplaatsing van het oppervlak van de geluidsbron als functie van de tijd wordt gegeven door $y(t) = A\cos(\omega t)$.

a) Bereken de geluidssnelheid.

b) Bereken het uitgezonden vermogen van deze geluidsbron.

c) Bereken de drukamplitude aan het oppervlak van de geluidsbron

d) Bereken ω en de verplaatsingsamplitude A.

Het uitgezonden signaal wordt nu gemengd met de eerste boventoon van 880 Hz De verplaatsing van het oppervlak is nu $y(t) = A\cos(\omega t) + A\cos(2\omega t)$. A en ω hebben dezelfde waarde als voorheen.

e) Hoe hoog is het geluidsniveau op 10 m van deze bron?

f) Hoe verandert het geluidsniveau dat in e) is berekend als $y(t) = A\cos(\omega t) - A\cos(2\omega t)$?

Opgave 3: Interferentie dubbelspleet (2.5 punt)

Bij een dubbelspleet experiment valt monochromatisch lineair gepolariseerd licht met golflengte λ op twee oneindig lange evenwijdige spleten met onderlinge afstand b. De spleten worden infinitesimaal smal verondersteld en belicht met een vlakke golf met amplitude E_0. Het diffractiebeeld wordt waargenomen op een scherm op een afstand D achter de spleten ($D \gg b$).

a) Bereken de posities van de maxima op het scherm.

b) Geef een uitdrukking voor de hoogste orde van het maximum dat nog net waargenomen kan worden. (**Hint**: Hier kun je de kleine hoek benadering dus niet gebruiken.)

Veronderstel nu dat de spleten een breedte a hebben en dat de afstand tussen de spleten weer b is.

c) Druk de intensiteit van het diffractiepatroon uit in a, b, θ en I_0, met I_0 de intensiteit van één zo'n spleet bij afbuighoek θ=0.

Voor één van de spleten wordt een glasplaatje geplaatst met dikte d en brekingsindex n.

d) Bereken de verschuiving op het scherm van de minima. Verschuiven alle minima evenveel? Motiveer je antwoord.

Voor beide spleten wordt een retardatieplaatje geplaatst. Het retardatieplaatje voor de ene spleet verdraait de polarisatie richting +30° en het plaatje voor de andere spleet verdraait de polarisatierichting -30°. De spleten mogen infinitesimaal smal verondersteld worden.

e) Schets het diffractiepatroon.

f) Bereken de intensiteit van de maxima en minima.

Opgave 4: Coherentie polarisatie (2.5 punt)

De coherentielengte is gedefinieerd als de maximale afstand tussen twee punten langs een stralenbundel waarbij er nog een goede faserelatie bestaat van het licht in beide punten. Met een goede faserelatie wordt hier bedoeld dat de fase van het licht niet meer dan π verloopt over deze lengte.

a) Leidt op basis van bovenstaande definitie van coherentielengte een uitdrukking voor de coherentielengte (in vacuüm) af. Neem hierbij aan dat de lichtbundel slechts 2 frequenties bevat, ω_1 en ω_2.

Op een frequentie verdubbelingkristal valt een laserbundel met golflengte 800 nm. Binnen in zo'n kristal wordt overal een tweede harmonische van de laserfrequentie gegenereerd. Deze bundel van 400 nm licht valt samen met de bundel van 800 nm. Het tweede harmonische licht heeft op het moment dat het gegenereerd wordt dezelfde fase als de laserbundel. Reflecties spelen geen rol. Door het verschil in brekingsindex bij de 2 golflengtes ontstaat er een faseverschil met *eerder* gegenereerd tweede harmonische licht. Naar analogie van de coherentielengte in opgave a) kan ook hier een coherentielengte gedefinieerd worden. Hiermee wordt de lengte *binnen het kristal* bedoeld waarover het gegenereerde tweede harmonische licht niet meer dan π in fase verloopt met eerder gegenereerd tweede harmonische licht.

b) Toon aan dat de coherentielengte L voor tweede harmonische generatie geschreven kan worden als: $L = \frac{\lambda_{2\omega}}{2}\frac{1}{\Delta n}$. Hier is $\lambda_{2\omega}$ de golflengte van het 2^e harmonische licht (in vacuüm) en Δn het verschil in brekingsindex van het kristal bij de laser en 2^e harmonische golflengten.

De brekingsindex van het verdubbelingkristal bedraagt 1.5308 bij 400 nm en 1.5108 bij 800 nm.

c) Bereken de coherentielengte L voor tweede harmonische generatie

Het 800 nm laser licht is lineair gepolariseerd, heeft amplitude E_0 en loopt in de positieve x-richting. Op t=0 heeft de golf in alle punten met x=0 een elektrisch veld dat in het y-z vlak valt zodat $\vec{E} = (0, \frac{1}{2}\sqrt{2}E_0, \frac{1}{2}\sqrt{2}E_0)$. Deze vlakke golf valt in x=0 loodrecht op een kristal, dat zo georiënteerd is dat de brekingsindex voor licht gepolariseerd in de y-richting n_y , en in de z-richting n_z is.

d) Bereken de minimale dikte d van het kristal zodat het uittredende licht circulair gepolariseerd is.

e) Geef de elektrische veldvector in x=d, zoals berekend in vraag d), op een willekeurig tijdstip t. Geef zowel de x-, y- als z-component.

Formuleblad bij tentamen Golven en Optica

Hoofdstuk 15

15.1) $v = \lambda f$

15.5) $k = 2\pi/\lambda$ en $\omega = 2\pi f$

15.6) $\omega = vk$

15.7) $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, sinusvormige golf in de $+x$-richting.

15.12) $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, de golfvergelijking.

15.13) $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, voor golven op een koord met spankracht F en massa per lengte eenheid μ.

15.xx) $y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \phi)$, algemene vorm voor lopende harmonische golven met amplitude A (in één dimensie); de willekeurige fase ϕ wordt vaak weggelaten.

15.21) $P(x,t) = F_y(x,t)v_y(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$, vermogen van een golf.

15.25) $P_{\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2$, gemiddeld vermogen van sinusvormige golf.

15.26) $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$, intensiteit is evenredig met kwadraat van de inverse afstand.

15.27) $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$, superpositieprincipe.

15.28) $y(x,t) = A_{\mathrm{SW}}\sin(kx)\sin(\omega t)$, staande golven op een koord, gefixeerd in $x = 0$.

15.33) $f_n = n\frac{v}{2L}$, frequenties staande golven op koord gefixeerd in $x = 0$ en $x = L$.

a) f_1, grondtoon, fundamental frequency

b) f_2, eerste boventoon, second harmonic

c) f_n, $(n-1)^{\mathrm{de}}$ boventoon, n^{th} harmonic

Hoofdstuk 16

16.3) $p(x,t) = -B\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$, drukfluctuatie door gradiënt van de deeltjesverplaatsing in een geluidsgolf.

16.5) $p_{\max} = BkA$, drukamplitude voor sinusvormige geluidsgolven; met B the bulk modulus en A de verplaatsingsampitude.

16.7) $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven.

16.8) $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, geluidssnelheid in een ideaal gas; met γ de verhouding van warmtecapaciteit bij constante druk en die bij constant volume, R de gasconstante, T de temperatuur in K, en M de molaire massa.

16.9) $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven in een vaste staaf, met Y de Young modulus.

16.14) $I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}\omega^2 A^2 = \frac{p_{\max}^2}{2\rho v} = \frac{p_{\max}^2}{2\sqrt{\rho B}}$, intensiteit (in $\mathrm{W/m^2}$) van een sinusvormige geluidsgolf.

16.15) $\beta = (10\,\mathrm{dB})\ {}^{10}\log\frac{I}{I_0}$, definitie van het geluidsniveau in decibel, met $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$.

16.16) $f_n = \frac{nv}{2L}, (n = 1, 2, 3, \cdots)$, frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan beide kanten open is.

16.22) $f_n = \frac{nv}{4L}, (n = 1, 3, 5, \cdots)$, frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan één kant open en aan de andere kant afgesloten is.

16.24) $f_{\rm beat} = |f_a - f_b|$, beat frequentie van twee signalen met een klein onderling frequentieverschil.

16.29) $f_{\rm L} = \frac{v+v_{\rm L}}{v+v_{\rm S}} f_{\rm S}$, Doppler effect; $v_{\rm L}$ en $v_{\rm S}$ zijn relatief t.o.v. een medium dat geluidssnelheid v heeft. Let op de tekens van $v_{\rm L}$ en $v_{\rm S}$!!

16.30) $\sin(\alpha) = \frac{v}{v_{\rm S}}$, hoek van schokgolf (deze heeft de vorm van een kegel) als de geluidsbron met snelheid $v_{\rm S} > v$ door een medium met geluidssnelheid v reist.

Hoofdstuk 32

32.4) $E = cB$ in vacuüm.

32.5) $B = \epsilon_0 \mu_0 c E$

32.6) $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, lichtsnelheid in vacuüm.

32.17) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\rm max} \cos(kx - \omega t)$, $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{e}_z B_{\rm max} \cos(kx - \omega t)$, sinusvormige vlakke electromagnetische golf in de $+x$-richting, $\vec{e}_{y(z)}$ is de eenheidsvector in de $y(z)$-richting en $E_{\rm max} = cB_{\rm max}$.

32.20) $E = vB$ en $B = \epsilon\mu v E$ in diëlectricum

32.21) $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, snelheid electromagnetische golf in een diëlectricum met permittiviteit $\epsilon = K\epsilon_0$ en permeabiliteit $\mu = K_{\rm m}\mu_0$

32.22) $n = \frac{c}{v} = \sqrt{KK_{\rm m}}$, brekingsindex. De relatieve permeabiliteit $K_{\rm m}$ is meestal ongeveer gelijk aan 1.

32.28) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, Poynting vector.

32.29) $I = S_{\rm av} = \frac{E_{\rm max} B_{\rm max}}{2\mu_0} = \frac{E^2_{\rm max}}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2_{\rm max}$, intensiteit van een sinusvormige golf in vacuüm, in W/m^2, stroomsnelheid van energie.

32.31) $\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$, stroomsnelheid van impuls (momentum).

32.32) $p_{\rm rad} = \frac{S_{\rm av}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt geabsorbeerd.

32.33) $p_{\rm rad} = \frac{2S_{\rm av}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt gereflecteerd.

32.36) Staande golven. Bij reflectie van een e.m. golf in $x = 0$ aan een prefecte geleider heeft het $\vec{E}$-veld een knoop in $x = 0$, en ook als $x = n\lambda/2$ met $(n = 1, 2, \cdots)$; de knopen in het $\vec{B}$-veld zijn $\lambda/4$ verschoven.

32.xx) Dispersie relatie: ω als functie van k. Fasesnelheid $v_f(k) = \omega/k$. Groepsnelheid $v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$.

Hoofdstuk 33

33.2) $\theta_r = \theta_i$, hoek van reflectie is hoek van inval.

33.4) $n_a \sin(\theta_a) = n_b \sin(\theta_b)$, wet van Snellius.

33.5) $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, golflengte in een medium met brekingsindex n.

33.6) $\sin(\theta_{\text{crit}}) = \frac{n_a}{n_b}$, de kritische hoek.

33.7) $I = I_{\max} \cos^2(\phi)$, Wet van Malus, polarisatie van gepolariseerd licht; ϕ is de hoek tussen de polarisatie-richting van het invallende licht en de polarisatie-as van de polarizer.

33.8) Brewster's wet: $\tan(\theta_p) = \frac{n_a}{n_b}$; θ_p is de Brewster hoek. De reflectiecoëfficiënt voor invallend licht dat 100% gepolariseerd is evenwijdig aan het vlak van inval en reflectie is bij deze hoek gelijk aan 0.

33.x) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\max} \cos(kx - \omega t) \pm \vec{e}_z E_{\max} \sin(kx - \omega t)$, circulair gepolariseerde vlakke golf die loopt in de $+x$-richting. Met het plusteken is de golf rechtsdraaiend indien u de golf tegemoet kijkt. De lengte van $\vec{E}$ is altijd $E_{\max}$.

33.y) Reflectiecoëfficiënten voor intensiteit: $R_\perp = \sin^2(\theta_t - \theta_i)/\sin^2(\theta_t + \theta_i)$, en $R_\parallel = \tan^2(\theta_t - \theta_i)/\tan^2(\theta_t + \theta_i)$. Voor loodrechte inval ($\theta_i = 0$) reduceren deze uitdrukkingen tot $R = (n_2 - n_1)^2/(n_2 + n_1)^2$.

Hoofdstuk 35

35.4) $d \sin(\theta) = m\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, constructieve interferentie als verschil in weglengte een geheel aantal golflengtes is. De afstand tussen 2 spleten is d

35.4) $d \sin(\theta) = (m + \frac{1}{2})\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, destructieve interferentie als verschil in weglengte een halftallig aantal golflengtes is.

35.6) $y_m = m\frac{R\lambda}{d}$, positie van maxima in Young's experiment; R is de afstand tussen spleten en scherm, d is de afstand tussen de twee spleten. $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

35.7) $E_P = 2E \cos(\frac{\phi}{2})$, amplitude. Superpositie van 2 sinusvormige golven met gelijke amplitude en onderling faseverschil ϕ.

35.11) $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$, faseverschil ϕ is evenredig met verschil in weglengte.

35.14) $I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)$, intensiteitspatroon van 2 oneindig smalle spleten in de Fraunhofer benadering.

Hoofdstuk 36

36.2) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{a}$ met $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$, minima voor diffractie aan één spleet met breedte a.

36.7) $I = I_0 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan één spleet met breedte a.

36.xx) $I = I_0 \left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan n spleten met onderlinge afstand d en verwaarloosbare breedte.

36.13) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, hoeken waar hoofdmaxima optreden voor een tralie met spleetafstand d.

36.15) $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$, spectraal scheidend vermogen.

36.16) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{2d}$ met $m = 1, 2, 3, \cdots$, Bragg conditie. Constructieve interferentie treedt op bij diffractie aan series evenwijdige vlakken op onderlinge afstand d. De hoek θ is hier de hoek tussen verstrooide bundel en de evenwijdige kristalvlakken met atomen waaraan verstrooid wordt.

36.17) $\sin\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D}$, hoek waarbij in het Fraunhofer diffractiepatroon van een rond gat met diameter D het eerste minimum optreedt. De begrenzing van de Airy-schijf.

Goniometrie

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$