Tentamen Golven en Optica

(NS-108B)

donderdag 17 april 2014, 9.00-12.00 uur

- Maak elke opgave op een **apart** vel voorzien van uw naam en studentnummer.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Verdeel uw tijd optimaal over de 4 opgaven; elke opgave weegt even zwaar.

Opgave 1. Lopende golf op een inhomogene snaar

Een golfpakketje $y(x,t)$ loopt op $t = 0$ s in de positieve x-richting langs een ideale en oneindig lange snaar. De snaar is opgespannen langs de x-as met spankracht $F = 25$ N. Voor $x < 0$ is de massa per lengte-eenheid μ en voor $x \geq 0$ is die $\frac{25}{16}\mu$. Neem aan dat $\mu = 0.01$ kg/m. Op $t = 0$ s is de uitwijking overal gelijk aan 0 m, behalve als x (in meter) ligt tussen -6 en -4. Voor die waarden van x wordt het golfpakketje gegeven door

$$y(x,0) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \times \cos(x\pi + 5\pi).$$

A is de amplitude.

(a) Schets de vorm van de snaar op $t = 0$. Geef duidelijk het punt $x = 0$ aan.

(b) Bereken de golfsnelheid in het deel van de snaar met $x < 0$ en in het deel met $x \geq 0$.

(c) Op welke tijdstippen is, in $x = +5$ m, de uitwijking van de snaar ongelijk aan 0?

(d) Bereken de totale energie van het golfpakketje op $t = 0$.

(e) Schets de vorm van de snaar op $t = 0.2$ s. Geef duidelijk aan voor welke punten de uitwijking maximaal is en in welke gebieden de uitwijking gelijk aan 0 is.

(f) Welke fractie van de energie in de golfpakketje wordt doorgelaten in $x = 0$, en welke fractie wordt gereflecteerd?

Opgave 2. Geluid

Een bolvormige geluidsbron met een gemiddelde straal van 0.1 m bevindt zich in lucht. De straal van de geluidsbron verandert in de tijd waardoor er een harmonisch golf geproduceerd wordt met een frequentie van 1 kHz. Op een afstand van 10 m van de bron bedraagt het geluidsniveau 70 dB. Verder is gegeven $B = 1.42 \times 10^5$Pa, $\rho = 1.20$kg/m^3.

(a) Bereken het uitgezonden vermogen van deze geluidsbron.

(b) Bereken de drukamplitude aan het oppervlak van de geluidsbron.

(c) Geef een uitdrukking voor de tijds- en plaatsafhankelijke drukamplitude van het geluid. Neem aan dat de afstand tot het centrum van de bron > 0.1 m is.

De geluidsbron beweegt met een snelheid van 10 m/s loodrecht op en naar een oneindig lange wand. Het geluid reflecteert aan de wand en wordt gemeten met een microfoon op de positie van de geluidsbron.

(d) Welke frequentie wordt gemeten voor het gereflecteerde signaal?

(e) Het gereflecteerde signaal interfereert met de heengaande golf. Beschrijf de vorm van het signaal dat de microfoon registreert; neem hierbij aan dat de heengaande en gereflecteerde golven gelijke amplitudes hebben op de positie van de microfoon. Illustreer uw beschrijving met een schets.

Opgave 3. Proef van Young

Bij de proef van Young valt monochromatisch licht met golflengte λ op twee oneindig lange evenwijdige spleten met onderlinge afstand a. De spleten worden in deze opgave in eerste instantie infinitesimaal smal verondersteld en belicht met een vlakke golf. Het diffractiepatroon wordt afgebeeld op een scherm op een afstand R van de spleten.

(a) Laat zien dat er maxima op het scherm worden gevonden op de posities $y_m = mR\lambda/a$, met $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ de orde van het maximum.

We nemen nu aan dat de spleten niet infinitesimaal smal zijn maar een eindige breedte b hebben en dat er monochromatisch licht wordt gebruikt.

(b) Schets het karakteristieke diffractiepatroon op het scherm. Het effect van de eindige spleetbreedte op het diffractiepatroon moet duidelijk zichtbaar zijn.

(c) Bereken de waarden voor a en b uit de volgende experimentele gegevens: $R = 1$ m, λ=500 nm, de afstand tussen de twee eerste minima links en rechts van het nulde orde maximum is 2 mm en op de positie waar het 5$^{\text{de}}$ orde maximum wordt verwacht vertoont de intensiteit een minimum.

We nemen nu aan dat de spleten infinitesimaal smal zijn. Als het licht niet monochromatisch is, dan zal het aantal ordes dat zichtbaar is beperkt worden. Een maat voor de lengteschaal waarop interferentie-effecten zichtbaar zijn is de zogenaamde coherentielengte L_c, $L_c = \lambda^2/\Delta\lambda$. Hier is $\Delta\lambda$ de bandbreedte van de lichtbron, het verschil tussen de maximale en minimale golflengte die wordt uitgezonden.

(d) Laat zien dat deze definitie van correlatielengte een goede schatting geeft van het weglengteverschil (zoals in de proef van Young) waarbij, en dus ook waarboven, interferentie-effecten verdwijnen.
Tip 1: Het volstaat om de lichtbron met alle golflengtes tussen $\lambda - \Delta\lambda/2$ en $\lambda + \Delta\lambda/2$ te vereenvoudigen tot een bron met slechts 2 golflengtes rondom λ, die onderling $\Delta\lambda/2$ verschillen.
Tip 2: Is er misschien een link met spectraal scheidend vermogen?

In het tweespleet experiment van opgave a) wordt een lichtbron met een gemiddelde golflengte van 500 nm gebruikt en een bandbreedte van 50 nm.

(e) Bereken vanaf welke orde er geen duidelijke interferentie maxima en minima meer zichtbaar zijn.

Opgave 4. Reflectie aan een grensvlak

Een vlakke lichtgolf valt vanuit medium 1 met brekingsindex n_1 onder een hoek θ_i in op een grensvlak met medium 2 met brekingsindex n_2. Er geldt $n_2 > n_1$. De hoeken van inval θ_i, reflectie θ_r, en breking θ_t zijn op de gebruikelijke wijze gedefinieerd. Het licht is gepolariseerd parallel aan het vlak van inval en reflectie. De *amplitudereflectiecoëfficiënt* $r_{\parallel}$ voor deze golf aan het grensvlak wordt gegeven door:

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos(\theta_i) - n_1 \cos(\theta_t)}{n_2 \cos(\theta_i) + n_1 \cos(\theta_t)}$$

(a) Schets in een figuur het grensvlak, de lichtgolven met bijbehorende polarisatie.

(b) Wat gebeurt er met deze lichtgolf als die onder de Brewsterhoek invalt?

(c) Leid uit de uitdrukking voor $r_{\parallel}$ af dat $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ als θ_i gelijk is aan de Brewsterhoek. Hint: Toon aan dat dan geldt $\sin(2\theta_i) = \sin(2\theta_t)$ en gebruik hiervoor de identiteit $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$.

(d) Leid vervolgens af dat voor de Brewsterhoek θ_p geldt: $\tan(\theta_p) = \frac{n_2}{n_1}$.

We laten de golf nu vanuit medium 2 op het grensvlak met medium 1 vallen. De Brewsterhoek voor deze situatie noemen we $\theta_{p'}$.

(e) Laat zien dat geldt: $\theta_p + \theta_{p'} = 90°$.

We laten de golf nu weer vanuit medium 1 op het grensvlak met medium 2 vallen (dus $n_2 > n_1$).

(f) Aan de hand van de uitdrukking voor $r_{\parallel}$ vind je dat $r_{\parallel}$ voor loodrechte inval groter dan 0 is. Leg uit waarom de gereflecteerde golf bij loodrechte inval ($\theta_i = 0$) **toch** een fasesprong van π maakt, zoals je hebt geleerd bij reflectie aan een dichter medium. *Hint:* Herteken de schets van opgave a) voor een steeds kleiner wordende hoek van inval (start bij voorkeur met en zo groot mogelijke hoek van inval) en let op de richting waarin $E_{\parallel}$ gemeten dan wel getekend wordt.

lege pagina

Formuleblad bij tentamen Golven en Optica

Hoofdstuk 15

15.1) $v = \lambda f$

15.5) $k = 2\pi/\lambda$ en $\omega = 2\pi f$

15.6) $\omega = vk$

15.7) $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, sinusvormige golf in de $+x$-richting.

15.12) $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, de golfvergelijking.

15.13) $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, voor golven op een koord met spankracht F en massa per lengte eenheid μ.

15.xx) $y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \phi)$, algemene vorm voor lopende harmonische golven met amplitude A (in één dimensie); de willekeurige fase ϕ wordt vaak weggelaten.

15.yy) Bij interface 1 $\rightarrow$ 2: Transmissiecoëfficiënt $\frac{2v_2}{v_2+v_1}$; Reflectiecoëfficiënt $\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}$

15.21) $P(x,t) = F_y(x,t)v_y(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$, vermogen van een golf.

15.25) $P_{\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2$, gemiddeld vermogen van sinusvormige golf.

15.26) $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$, intensiteit is evenredig met kwadraat van de inverse afstand.

15.27) $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$, superpositieprincipe.

15.28) $y(x,t) = A_{\mathrm{SW}}\sin(kx)\sin(\omega t)$, staande golven op een koord, gefixeerd in $x = 0$.

15.33) $f_n = n\frac{v}{2L}$, frequenties staande golven op koord gefixeerd in $x = 0$ en $x = L$.

a) f_1, grondtoon, fundamental frequency
b) f_2, eerste boventoon, second harmonic
c) f_n, $(n-1)^{\mathrm{de}}$ boventoon, n^{th} harmonic

Hoofdstuk 16

16.3) $p(x,t) = -B\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$, drukfluctuatie door gradiënt van de deeltjesverplaatsing in een geluidsgolf.

16.5) $p_{\mathrm{max}} = BkA$, drukamplitude voor sinusvormige geluidsgolven; met B the bulk modulus en A de verplaatsingsampitude.

16.7) $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven.

16.8) $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, geluidssnelheid in een ideaal gas; met γ de verhouding van warmtecapaciteit bij constante druk en die bij constant volume, R de gasconstante, T de temperatuur in K, en M de molaire massa.

16.9) $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven in een vaste staaf, met Y de Young modulus.

16.14) $I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}\omega^2 A^2 = \frac{p_{\mathrm{max}}^2}{2\rho v} = \frac{p_{\mathrm{max}}^2}{2\sqrt{\rho B}}$, intensiteit (in $\mathrm{W/m^2}$) van een sinusvormige geluidsgolf.

16.15) $\beta = (10\,\mathrm{dB})\,{}^{10}\log\frac{I}{I_0}$, definitie van het geluidsniveau in decibel, met $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$.

16.16) $f_n = \frac{nv}{2L}, (n = 1, 2, 3, \cdots)$, frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan beide kanten open is.

16.22) $f_n = \frac{nv}{4L}, (n = 1, 3, 5, \cdots)$, frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan één kant open en aan de andere kant afgesloten is.

16.24) $f_{\mathrm{beat}} = |f_a - f_b|$, beat frequentie van twee signalen met een klein onderling frequentieverschil.

16.29) $f_{\mathrm{L}} = \frac{v+v_{\mathrm{L}}}{v+v_{\mathrm{S}}} f_{\mathrm{S}}$, Doppler effect; v_{L} en v_{S} zijn relatief t.o.v. een medium dat geluidssnelheid v heeft. Let op de tekens van v_{L} en v_{S}!!

16.30) $\sin(\alpha) = \frac{v}{v_{\mathrm{S}}}$, hoek van schokgolf (deze heeft de vorm van een kegel) als de geluidsbron met snelheid $v_{\mathrm{S}} > v$ door een medium met geluidssnelheid v reist.

Hoofdstuk 32

32.4) $E = cB$ in vacuüm.

32.5) $B = \epsilon_0 \mu_0 c E$

32.6) $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, lichtsnelheid in vacuüm.

32.17) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\max} \cos(kx - \omega t)$, $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{e}_z B_{\max} \cos(kx - \omega t)$, sinusvormige vlakke electromagnetische golf in de $+x$-richting, $\vec{e}_{y(z)}$ is de eenheidsvector in de $y(z)$-richting en $E_{\max} = cB_{\max}$.

32.20) $E = vB$ en $B = \epsilon\mu v E$ in diëlectricum

32.21) $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, snelheid electromagnetische golf in een diëlectricum met permittiviteit $\epsilon = K\epsilon_0$ en permeabiliteit $\mu = K_{\mathrm{m}}\mu_0$

32.22) $n = \frac{c}{v} = \sqrt{KK_{\mathrm{m}}}$, brekingsindex. De relatieve permeabiliteit K_{m} is meestal ongeveer gelijk aan 1.

32.28) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$, Poynting vector.

32.29) $I = S_{\mathrm{av}} = \frac{E_{\max} B_{\max}}{2\mu_0} = \frac{E^2_{\max}}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2_{\max}$, intensiteit van een sinusvormige golf in vacuüm, in $\mathrm{W/m^2}$, stroomsnelheid van energie.

32.31) $\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$, stroomsnelheid van impuls (momentum).

32.32) $p_{\mathrm{rad}} = \frac{S_{\mathrm{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt geabsorbeerd.

32.33) $p_{\mathrm{rad}} = \frac{2S_{\mathrm{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt gereflecteerd.

32.36) Staande golven. Bij reflectie van een e.m. golf in $x = 0$ aan een prefecte geleider heeft het $\vec{E}$-veld een knoop in $x = 0$, en ook als $x = n\lambda/2$ met $(n = 1, 2, \cdots)$; de knopen in het $\vec{B}$-veld zijn $\lambda/4$ verschoven.

32.xx) Dispersie relatie: ω als functie van k. Fasesnelheid $v_f(k) = \omega/k$. Groepsnelheid $v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$.

Hoofdstuk 33

33.2) $\theta_r = \theta_i$, hoek van reflectie is hoek van inval.

33.4) $n_a \sin(\theta_a) = n_b \sin(\theta_b)$, wet van Snellius.

33.5) $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, golflengte in een medium met brekingsindex n.

33.6) $\sin(\theta_{\text{crit}}) = \frac{n_a}{n_b}$, de kritische hoek.

33.7) $I = I_{\max} \cos^2(\phi)$, Wet van Malus, polarisatie van gepolariseerd licht; ϕ is de hoek tussen de polarisatie-richting van het invallende licht en de polarisatie-as van de polarizer.

33.8) Brewster's wet: $\tan(\theta_p) = \frac{n_a}{n_b}$; θ_p is de Brewster hoek. De reflectiecoëfficiënt voor invallend licht dat 100% gepolariseerd is evenwijdig aan het vlak van inval en reflectie is bij deze hoek gelijk aan 0.

33.x) $\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{e}_y E_{\max} \cos(kx-\omega t) \pm \vec{e}_z E_{\max} \sin(kx-\omega t)$, circulair gepolariseerde vlakke golf die loopt in de $+x$-richting. Met het plusteken is de golf rechtsdraaiend indien u de golf tegemoet kijkt. De lengte van $\vec{E}$ is altijd $E_{\max}$.

33.y) Reflectiecoëfficiënten voor intensiteit: $R_\perp = \sin^2(\theta_t - \theta_i)/\sin^2(\theta_t + \theta_i)$, en $R_\parallel = \tan^2(\theta_t - \theta_i)/\tan^2(\theta_t + \theta_i)$. Voor loodrechte inval ($\theta_i = 0$) reduceren deze uitdrukkingen tot $R = (n_2 - n_1)^2/(n_2 + n_1)^2$.

Hoofdstuk 35

35.4) $d\sin(\theta) = m\lambda$ met $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, constructieve interferentie als verschil in weglengte een geheel aantal golflengtes is. De afstand tussen 2 spleten is d.

35.4) $d\sin(\theta) = (m + \frac{1}{2})\lambda$ met $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, destructieve interferentie als verschil in weglengte een halftallig aantal golflengtes is.

35.6) $y_m = m\frac{R\lambda}{d}$, positie van maxima in Young's experiment; R is de afstand tussen spleten en scherm, d is de afstand tussen de twee spleten. $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

35.7) $E_P = 2E\cos(\frac{\phi}{2})$, amplitude. Superpositie van 2 sinusvormige golven met gelijke amplitude en onderling faseverschil ϕ.

35.11) $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$, faseverschil ϕ is evenredig met verschil in weglengte.

35.14) $I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$, intensiteitspatroon van 2 oneindig smalle spleten in de Fraunhofer benadering.

Hoofdstuk 36

36.2) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{a}$ met $m = \pm1, \pm2, \cdots$, minima voor diffractie aan één spleet met breedte a.

36.7) $I = I_0\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan één spleet met breedte a.

36.xx) $I = I_0\left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan n spleten met onderlinge afstand d en verwaarloosbare breedte.

36.13) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}$ met $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, hoeken waar hoofdmaxima optreden voor een tralie met spleetafstand d.

36.15) $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$, spectraal scheidend vermogen.

36.16) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{2d}$ met $m = 1, 2, 3, \cdots$, Bragg conditie. Constructieve interferentie treedt op bij diffractie aan series evenwijdige vlakken op onderlinge afstand d. De hoek θ is hier de hoek tussen verstrooide bundel en de evenwijdige kristalvlakken met atomen waaraan verstrooid wordt.

36.17) $\sin\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D}$, hoek waarbij in het Fraunhofer diffractiepatroon van een rond gat met diameter D het eerste minimum optreedt. De begrenzing van de Airy-schijf.

Goniometrie

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$