Tentamen Golven en Optica
(NS-108B)

woensdag 29 juni 2016, 13.30-16.30 uur

- Maak elke opgave op een **apart** vel voorzien van uw naam en studentnummer.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Verdeel uw tijd optimaal over de 4 opgaven; elk onderdeel weegt even zwaar.

Opgave 1. Kennis van begrippen (2.5 punten)

Geef een kort en helder antwoord op de volgende vragen.

(a) De Fresnel reflectie-coëfficiënten voor de amplitude heten r_s en r_p. Leg uit wat de betekenis van de s en p is.

(b) Waarom heet de Brewsterhoek ook wel polarizatiehoek?

(c) Geef de r-afhankelijkheid van het elektrische veld van een enkele lading q in de oorsprong. Geef ook de r-afhankelijkheid van het elektrische (of magnetische) veld van een stralingsbron in de oorsprong die EM straling met een frequentie ω uitzendt in alle richtingen (niet per se gelijkmatig verdeeld).

(d) Geef de *intensiteit* op afstand r van een lichtbron die 1 W aan EM straling uitzendt, gelijkmatig verdeeld in alle richtingen. Geef de relatie tussen die intensiteit en de (gemiddelde) sterkte van het EM veld van zo'n stralingsbron? Check met name de r-afhankelijkheid.

(e) Omschrijf hoe het Fraunhofer diffractiepatroon van een enkele spleet met eindige breedte eruit ziet.

(f) Omschrijf hoe het Fraunhofer interferentiepatroon van een dubbele spleetsysteem eruit ziet. Hier geldt de aanname dat de breedte van elke spleet gelijk is en veel kleiner dan de afstand tussen de 2 spleten.

(g) Midden tussen de twee spleten zoals in (f) wordt een identieke derde spleet aangebracht. Omschrijf de *veranderingen* die je dan waarneemt in vergelijking met het patroon bij (f). Denk hierbij aan de posities van de hoofd- en nevenmaxima, de hoogte en breedte van die maxima en de posities van de minima.

Opgave 2. Lopende golf op een inhomogene snaar

Een golfpakketje $y(x,t)$ loopt op $t = 0$ s in de positieve x-richting langs een ideale en oneindig lange snaar. De snaar is opgespannen langs de x-as met spankracht $F = 25$ N. Voor $x < 0$ is de massa per lengte-eenheid μ en voor $x \geq 0$ is die $\frac{25}{16}\mu$. Neem aan dat $\mu = 0.01$ kg/m. Op $t = 0$ s is de uitwijking overal gelijk aan 0 m, behalve als x (in meter) ligt tussen -6 en -4. Voor die waarden van x wordt het golfpakketje gegeven door

$$y(x,0) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \times \cos(x\pi + 5\pi) .$$

A is de amplitude van het pulsvormige pakketje.

(a) Schets de vorm van de snaar op $t = 0$. Geef duidelijk het punt $x = 0$ aan.

(b) Bereken de golfsnelheid in het deel van de snaar met $x < 0$ en in het deel met $x \geq 0$.

(c) Op welke tijdstippen is, in $x = +5$ m, de uitwijking van de snaar ongelijk aan 0?

(d) Bereken de totale energie van het golfpakketje op $t = 0$.

(e) Schets de vorm van de snaar op $t = 0.2$ s. Geef duidelijk aan voor welke punten de uitwijking maximaal/minimaal en wat de hoogte van deze maxima/minima is. Geef ook aan in welke gebieden de uitwijking gelijk aan 0 is.

(f) Welke fractie van de energie in de golfpakketje wordt doorgelaten in $x = 0$, en welke fractie wordt gereflecteerd?

Opgave 3 Maxwell's vergelijking

Beschouw een elektromagnetische vlakke golf binnen een medium met brekingsindex n die reist in de richting van de positieve z-as, met golfgetal k en hoekfrequentie ω. Deze vlakke golf is lineair gepolariseerd in de y-richting.

(a) Geef de algemene analytische formule voor $\vec{E}(\vec{r},t)$ van deze golf. Het is toegestaan om de drie componenten van de vector $\vec{E}$ afzonderlijk te geven en/of de $\vec{r}$ afhankelijkheid expliciet uit te schrijven in termen van x, y en z.

(b) Leid, gebaseerd op Maxwell's vergelijking

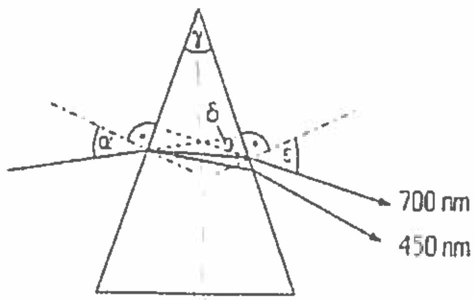
$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

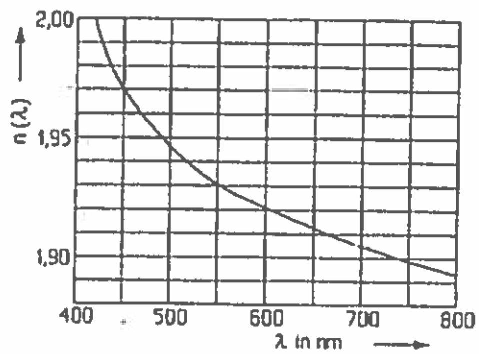
een formule af voor het magnetische veld van deze golf.

(c) Geef de mogelijke formule's voor het E-veld van circulair gepolariseerde vlakke golven die reizen in de positieve z-richting en waarvan de y-component gelijk is aan de golf die bij (a) werd gevraagd.

Opgave 4 Prisma

Eeen lichtstraal valt op een prisma zoals in onderstaande figuur. Het prisma is een gelijkbenige driehoek met tophoek $\gamma = 45°$. Het licht bevat meerdere frequenties en de brekingsindex als functie van de golflengte wordt gegeven in onderstaande figuur.





(a) Als $\alpha = 30°$ bereken de hoek ϵ voor licht met $\lambda = 450$ nm en $\lambda = 700$ nm en tevens de hoek tussen deze twee uitgaande lichtstralen zoals getekend in de figuur.

(b) Bepaal de hoek α opdat alleen licht met $\lambda > 500$ nm door het prisma valt.

(c) Beschouw nu een prisma met $\gamma = 55°$ en neem aan dat het licht lineair gepolariseerd is in het vlak van tekening. In deze configuratie is er een speciale hoek α_p en bestaat er een golflengte λ_p (in lucht) zodat een monochromatische lichtstraal met deze frequentie/golflengte perfect wordt doorgelaten door het prisma. Bepaal α_p en λ_p.

Indien u geen beschikking heeft over een rekenmachine volstaat het ook om de berekeningen symbolisch uit te voeren en te vermelden aan welke vergelijkingen grootheden als α_p en λ_p moeten voldoen.

lege pagina

Formuleblad bij tentamen Golven en Optica

Mechanische golven

15.1) $v = \lambda f$

15.5) $k = 2\pi/\lambda$ en $\omega = 2\pi f$

15.6) $\omega = vk$

15.7) $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, sinusvormige golf in de $+x$-richting.

15.12) $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, de golfvergelijking.

15.13) $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, voor golven op een koord met spankracht F en massa per lengte eenheid μ.

15.xx) $y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \phi)$, algemene vorm voor lopende harmonische golven met amplitude A (in één dimensie); de willekeurige fase ϕ wordt vaak weggelaten.

15.yy) Bij interface $1 \rightarrow 2$: Transmissiecoëfficiënt $\frac{2v_2}{v_2+v_1}$; Reflectiecoëfficiënt $\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}$

15.21) $P(x,t) = F_y(x,t)v_y(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$, vermogen van een golf.

15.25) $P_{\text{av}} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2$, gemiddeld vermogen van sinusvormige golf.

15.26) $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$, intensiteit is evenredig met kwadraat van de inverse afstand.

15.27) $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$, superpositieprincipe.

15.28) $y(x,t) = A_{\text{SW}}\sin(kx)\sin(\omega t)$, staande golven op een koord, gefixeerd in $x = 0$.

15.33) $f_n = n\frac{v}{2L}$, frequenties staande golven op koord gefixeerd in $x = 0$ en $x = L$.

a) f_1, grondtoon, fundamental frequency
b) f_2, eerste boventoon, second harmonic
c) f_n, $(n-1)^{\text{de}}$ boventoon, n^{th} harmonic

Geluid

16.3) $p(x,t) = -B\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$, drukfluctuatie door gradiënt van de deeltjesverplaatsing in een geluidsgolf.

16.5) $p_{\max} = BkA$, drukamplitude voor sinusvormige geluidsgolven; met B the bulk modulus en A de verplaatsingsampitude.

16.7) $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven.

16.8) $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, geluidssnelheid in een ideaal gas; met γ de verhouding van warmtecapaciteit bij constante druk en die bij constant volume, R de gasconstante, T de temperatuur in K, en M de molaire massa.

16.9) $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven in een vaste staaf, met Y de Young modulus.

16.14) $I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}\omega^2 A^2 = \frac{p_{\max}^2}{2\rho v} = \frac{p_{\max}^2}{2\sqrt{\rho B}}$, intensiteit (in W/m^2) van een sinusvormige geluidsgolf.

16.15) $\beta = (10\,\mathrm{dB})\,{}^{10}\log\frac{I}{I_0}$, definitie van het geluidsniveau in decibel, met $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$.

16.16) $f_n = \frac{nv}{2L}, (n = 1, 2, 3, \cdots)$, frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan beide kanten open is.

16.22) $f_n = \frac{nv}{4L}, (n = 1, 3, 5, \cdots)$, frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan één kant open en aan de andere kant afgesloten is.

16.24) $f_{\mathrm{beat}} = |f_a - f_b|$, beat frequentie van twee signalen met een klein onderling frequentieverschil.

16.29) $f_L = \frac{v+v_L}{v+v_S} f_S$, Doppler effect; v_L en v_S zijn relatief t.o.v. een medium dat geluidssnelheid v heeft. Let op de tekens van v_L en v_S!!

16.30) $\sin(\alpha) = \frac{v}{v_S}$, hoek van schokgolf (deze heeft de vorm van een kegel) als de geluidsbron met snelheid $v_S > v$ door een medium met geluidssnelheid v reist.

Elektromagnetische golven

32.4) $E = cB$ in vacuüm.

32.5) $B = \epsilon_0\mu_0 cE$

32.6) $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, lichtsnelheid in vacuüm.

32.17) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\mathrm{max}}\cos(kx - \omega t)$, $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{e}_z B_{\mathrm{max}}\cos(kx - \omega t)$, sinusvormige vlakke electromagnetische golf in de $+x$-richting, $\vec{e}_{y(z)}$ is de eenheidsvector in de $y(z)$-richting en $E_{\mathrm{max}} = cB_{\mathrm{max}}$.

32.20) $E = vB$ en $B = \epsilon\mu vE$ in diëlectricum

32.21) $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, snelheid electromagnetische golf in een diëlectricum met permittiviteit $\epsilon = K\epsilon_0$ en permeabiliteit $\mu = K_{\mathrm{m}}\mu_0$

32.22) $n = \frac{c}{v} = \sqrt{KK_{\mathrm{m}}}$, brekingsindex. De relatieve permeabiliteit K_{m} is meestal ongeveer gelijk aan 1.

32.28) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$, Poynting vector.

32.29) $I = S_{\mathrm{av}} = \frac{E_{\mathrm{max}}B_{\mathrm{max}}}{2\mu_0} = \frac{E^2_{\mathrm{max}}}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\epsilon_0 cE^2_{\mathrm{max}}$, intensiteit van een sinusvormige golf in vacuüm, in $\mathrm{W/m^2}$, stroomsnelheid van energie.

32.31) $\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$, stroomsnelheid van impuls (momentum).

32.32) $p_{\mathrm{rad}} = \frac{S_{\mathrm{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt geabsorbeerd.

32.33) $p_{\mathrm{rad}} = \frac{2S_{\mathrm{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt gereflecteerd.

32.36) Staande golven. Bij reflectie van een e.m. golf in $x = 0$ aan een prefecte geleider heeft het $\vec{E}$-veld een knoop in $x = 0$, en ook als $x = n\lambda/2$ met $(n = 1, 2, \cdots)$; de knopen in het $\vec{B}$-veld zijn $\lambda/4$ verschoven.

32.xx) Dispersie relatie: ω als functie van k. Fasesnelheid $v_f(k) = \omega/k$. Groepsnelheid $v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$.

Eigenschappen van licht

33.2) $\theta_r = \theta_i$, hoek van reflectie is hoek van inval.

33.4) $n_a \sin(\theta_a) = n_b \sin(\theta_b)$, wet van Snellius.

33.5) $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, golflengte in een medium met brekingsindex n.

33.6) $\sin(\theta_{\text{crit}}) = \frac{n_a}{n_b}$, de kritische hoek.

33.7) $I = I_{\text{max}} \cos^2(\phi)$, Wet van Malus, polarisatie van gepolariseerd licht; ϕ is de hoek tussen de polarisatie-richting van het invallende licht en de polarisatie-as van de polarizer.

33.8) Brewster's wet: $\tan(\theta_p) = \frac{n_a}{n_b}$; θ_p is de Brewster hoek. De reflectiecoëfficiënt voor invallend licht dat 100% gepolariseerd is evenwijdig aan het vlak van inval en reflectie is bij deze hoek gelijk aan 0.

33.x) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\text{max}} \cos(kx - \omega t) \pm \vec{e}_z E_{\text{max}} \sin(kx - \omega t)$, circulair gepolariseerde vlakke golf die loopt in de $+x$-richting. Met het plusteken is de golf rechtsdraaiend indien u de golf tegemoet kijkt. De lengte van $\vec{E}$ is altijd E_{max}.

33.y) Reflectiecoëfficiënten voor intensiteit: $R_\perp = \sin^2(\theta_t - \theta_i)/\sin^2(\theta_t + \theta_i)$, en $R_\parallel = \tan^2(\theta_t - \theta_i)/\tan^2(\theta_t + \theta_i)$. Voor loodrechte inval ($\theta_i = 0$) reduceren deze uitdrukkingen tot $R = (n_2 - n_1)^2/(n_2 + n_1)^2$.

Interferentie

35.4) $d \sin(\theta) = m\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, constructieve interferentie als verschil in weglengte een geheel aantal golflengtes is. De afstand tussen 2 spleten is d.

35.4) $d \sin(\theta) = (m + \frac{1}{2})\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, destructieve interferentie als verschil in weglengte een halftallig aantal golflengtes is.

35.6) $y_m = m\frac{R\lambda}{d}$, positie van maxima in Young's experiment; R is de afstand tussen spleten en scherm, d is de afstand tussen de twee spleten. $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

35.7) $E_P = 2E \cos(\frac{\phi}{2})$, amplitude. Superpositie van 2 sinusvormige golven met gelijke amplitude en onderling faseverschil ϕ.

35.11) $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$, faseverschil ϕ is evenredig met verschil in weglengte.

35.14) $I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)$, intensiteitspatroon van 2 oneindig smalle spleten in de Fraunhofer benadering.

Diffractie

36.2) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{a}$ met $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$, minima voor diffractie aan één spleet met breedte a.

36.7) $I = I_0 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan één spleet met breedte a.

36.xx) $I = I_0 \left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan n spleten met onderlinge afstand d en verwaarloosbare breedte.

36.13) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, hoeken waar hoofdmaxima optreden voor een tralie met spleetafstand d.

36.15) $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$, spectraal scheidend vermogen.

36.16) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{2d}$ met $m = 1, 2, 3, \cdots$, Bragg conditie. Constructieve interferentie treedt op bij diffractie aan series evenwijdige vlakken op onderlinge afstand d. De hoek θ is hier de hoek tussen verstrooide bundel en de evenwijdige kristalvlakken met atomen waaraan verstrooid wordt.

36.17) $\sin\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D}$, hoek waarbij in het Fraunhofer diffractiepatroon van een rond gat met diameter D het eerste minimum optreedt. De begrenzing van de Airy-schijf.

Goniometrie

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$