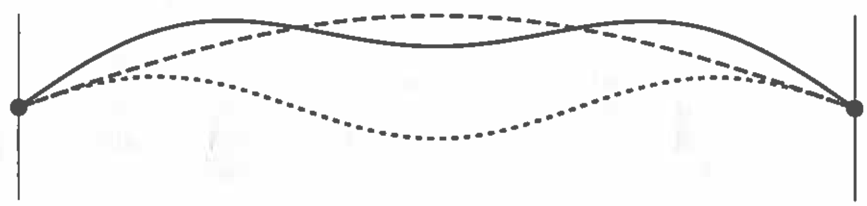
Tentamen Golven en Optica
(NS-108B)

woensdag 28 juni 2017, 17.00-20.00 uur

- Maak elke opgave op een **apart** vel voorzien van uw naam en studentnummer.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Verdeel uw tijd optimaal over de 4 opgaven; elk onderdeel weegt even zwaar.

Opgave 1. Golven op een snaar (2.5 pt)

Een ideale snaar is op $t = 0$ opgespannen tussen 2 vaste punten, en heeft dan de vorm zoals weergegeven door de vette curve in de onderstaande figuur. Op $t = 0$ wordt de snaar vanuit *stilstand* losgelaten. Vraag niet hoe de snaar op $t = 0$ deze beginconditie heeft gekregen. Het is een gegeven.



De vette curve is de som van de gestreepte en de gestippelde curve die elk een sinus-vorm hebben. De spankracht F van de snaar is 100 N. de massa per lengte-eenheid is 0.01 kg/m en de lengte is 50 cm. De uitwijking in het midden van de snaar is op $t = 0$ gelijk aan 1 cm. (De tekening is dus niet op schaal, maar sterk uitgerekt in verticale richting.)

(a) Bereken de snelheid die lopende golven op deze snaar hebben. Bereken de frequentie f_0 (in Hz) van de grondtoon van deze snaar.

(b) Welke frequenties zal deze snaar voortbrengen nadat deze is losgelaten. Schets de vorm van de snaar op $t = 1/f_0$. Schets de vorm ook halverwege dat tijdstip, dus op $t = 0.5/f_0$. (Kun je niet zo goed tekenen, dan mag je de schets toelichten met woorden.)

(c) Omschrijf aan welke voorwaarden een bewegende snaar moet voldoen opdat de beweging ervan kan worden beschouwd als een staande golf. Vormt de bewegende snaar voor $t > 0$ een staande golf? Zo ja, waarom, zo nee, waarom niet?

(d) Bepaal de uitwijking $y(x, t)$ (in m) van deze snaar voor $t \geq 0$. Gebruik hierbij het feit dat de gestippelde en de gestreepte curve (zie figuur) in de 2 vaste punten dezelfde helling hebben. Kies zelf de positie van de oorsprong.

(e) Zijn er momenten waarop de energie volledig bestaat uit kinetische energie? Indien ja, geef deze momenten en bereken de totale hoeveelheid energie in de snaar door de kinetische energie op zo'n moment te berekenen. Indien nee, bereken dan de totale hoeveelheid energie in de snaar door op $t = 0$ de potentiële energie in de snaar te berekenen.

Opgave 2. Interferentie patroon van meerdere spleten (2.5 pt)

(a) Schets het interferentie patroon (intensiteit op y-as als functie van $\alpha = \frac{ka}{2}\sin(\theta)$, k is golfgetal, a is afstand , θ is diffractiehoek) van 4 infinitesimaal dunne spleten tussen de tweede orde hoofd-maxima aan beide kanten van het centraal maximum. Geef in de schets de waardes van α voor de interferentie minima tussen het centrale en eerste hoofdmaximum.

(b) Wat is de waarde van het intensiteitsmaximum ten opzichte van het intensiteitsmaximum van één spleet? Waarom is dit niet in tegenspraak met het wet van energiebehoud?

(c) Wat is het onderlinge verschil in fase tussen licht van de vier spleten bij het tweede minimum (geteld vanaf het centrale hoofdmaximum)?

(d) Infinitesimaal dunne spleten bestaan niet. Beschrijf hoe het interferentiepatroon, zoals geschetst in het begin van deze opgave, verandert als de breedte van de spleten de helft is van de afstand tussen de spleten ($b = a/2$)? Beschrijf het patroon ook als $b = a$.

(e) Onder ongeveer welke hoek (in graden) kun je met dit spleetsysteem voor $b = a/2$ en met $a = 2\mu$m het derde hoofdmaximum waarnemen van licht met een golflengte van 500 nm? De grootte van die hoek zal niet precies hetzelfde zijn als voor $b = 0$. Geef daarom ook de minimale en maximale hoek aan waarvoor je **zeker** weet dat het derde hoofdmaximum er tussenin ligt.

(f) Twee golflengtes kun je beschouwen als gescheiden (volgens het Rayleigh criterium) als een hoofdmaximum van de ene golflengte samenvalt met het eerste minimum naast het corresponderende hoofdmaximum van de andere golflengte. Welke golflengte kun je met deze opstelling volgens het Rayleigh criterium scheiden bij het derde hoofdmaximum van licht met λ=500 nm?

Opgave 3. Eigenschappen van dipoolstraling (2.5 pt)

Een in de y-richting gepolariseerde monochromatische lichtbundel valt in langs de x-as en treft in de oorsprong een goed polariseerbaar molecuul, dat vervolgens dipoolstraling uitzendt.

(a) Beschrijf het verstrooiingspatroon (verdeling van de intensiteit van het uitgezonden licht als functie van de hoek). Wat is de verhouding van de intensiteiten die je waarneemt als je langs de 3 assen, en onder een hoek van 45 graden tussen x-as en z-as naar het molecuul kijkt?

Antwoord: $I_x : I_y : I_z : I_{45x,z}$ = ____ : ____ : ____ : ____.

(b) Wat is de oscillatierichting van het E-veld en van het B-veld op elk punt langs deze 4 lijnen?

(c) Wat is richting van de energieflux langs deze 4 lijnen?

Nu beschouwen we de situatie waar het invallende licht ongepolariseerd is (dus bestaat uit en een grote hoeveelheid kleine golftreinen met verschillende polarisatie).

(d) Beschrijf voor dit geval ook het intensiteitspatroon en geef de verhouding van de intensiteiten die je waarneemt als je langs de x-as, de y-as of de z-as naar het molecuul kijkt.

Antwoord: $I_x : I_y : I_z$ = ____ : ____ : ____.

(e) Leg uit waarom een lichtstraal door een transparant materiaal als water gaat zonder veel verstrooiing naar de zijkanten, hoewel de dipoolstraling van de individuele moleculen alle kanten op gaat.

(f) Leg (kwalitatief) uit waarom licht (ver weg van absorptiebanden) met een fasesnelheid $v < c$ door een medium als water gaat.

Opgave 4. Polarisatie (2.5 pt)

We gaan proberen de polarisatierichting van lineair gepolariseerd licht door middel van alleen maar polarisatoren met 90° te draaien. We nemen aan dat het licht zich voortplant in de z-richting en nergens van richting verandert. Het opvallende licht is lineair gepolariseerd in de x-richting in heeft een amplitude E_0.

(a) Geef de Jones-vector van dit licht, en geef de Jones-matrix van een ideale polarisator die een hoek θ maakt met de y-as.

(b) Geef de Jones-vector van het licht nadat het de polarisator is gepasseerd. In welke richting is het licht nu gepolariseerd? Hoe groot is de amplitude in die richting als functie van θ? Welke fractie van de oorspronkelijke intensiteit is verloren gegaan in de polarisator?

(c) We plaatsen nu achtereenvolgens langs een optische as (de z-as) drie polarisatoren de eerste op 30°, de tweede op 60° en de derde op 90°. Gebruik het product van Jones-matrices om op te schrijven hoe de Jones-vector van het licht dat de derde polarisator verlaat eruit ziet. Reken het nog niet uit.

(d) Welke fractie van de oorspronkelijke intensiteit is overgebleven nadat het licht deze drie polarisatoren is gepasseerd? Gebruik hiervoor het resultaat uit (b). Het expliciet vermenigvuldigen van alle Jones matrices om zo het resultaat te verkrijgen is niet verboden, maar is nodeloos ingewikkeld.

(e) Geef de algemene relatie voor de overgebleven intensiteit nadat het licht n polarisatoren is gepasseerd waarvan de oriëntatie steeds met een hoek $\pi/(2n)$ toeneemt, zodat de laatste polarisator een hoek van 90° maakt met de oorspronkelijke polarisatierichting. Bereken tot slot de overgebleven intensiteit in de limiet voor n naar oneindig.

lege pagina

- $\sin\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D}$, hoek waarbij in het Fraunhofer diffractiepatroon van een rond gat met diameter D het eerste minimum optreedt. De begrenzing van de Airy-schijf.
- $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
- $\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$
- $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2$, energiedichtheid
- $r_s = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$
- $r_p = \frac{n_t\cos\theta_i - n_i\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}$
- $t_s = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$
- $t_p = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}$
- $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$
- Reflectiecoëfficiënten voor intensiteit: $R_\perp = \sin^2(\theta_t - \theta_i)/\sin^2(\theta_t + \theta_i)$, en $R_\parallel = \tan^2(\theta_t - \theta_i)/\tan^2(\theta_t + \theta_i)$. Voor loodrechte inval ($\theta_i = 0$) reduceren deze uitdrukkingen tot $R = (n_2 - n_1)^2/(n_2 + n_1)^2$.
- $I = I_{\max}\cos^2(\phi)$, Wet van Malus; ϕ is de hoek tussen de polarisatie-richting van het invallende licht en de polarisatie-as van de polarizer.
- **Jonescalculus:** Alle hoeken zijn ten opzichte van de x-as.
- Lineair gepolariseerd

$$\vec{E} = A\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}. \tag{1}$$

- Circulair linksdraaiend

$$\vec{E} = \frac{A}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} \tag{2}$$

- Circulair rechtsdraaiend

$$\vec{E} = \frac{A}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix} \tag{3}$$

- Polarizer

$$\overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}, \tag{4}$$

- Halflambda golfplaatje

$$\overleftrightarrow{M} = \mathrm{e}^{-i\pi/2}\begin{bmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{bmatrix}, \tag{5}$$

- Kwartlambda golfplaatje

$$\overleftrightarrow{M} = \mathrm{e}^{-i\pi/4}\begin{bmatrix}\cos^2\theta + i\sin^2\theta & (1-i)\sin\theta\cos\theta\\ (1-i)\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + i\cos^2\theta\end{bmatrix}, \tag{6}$$

- Rayleigh scattering (aan een dipool) van ongepolariseerd licht

$$I = I_o\frac{8\pi^4\epsilon_0^2\chi^2}{\lambda^4R^2}(1 + \cos^2\theta) \tag{7}$$

Formuleblad bij tentamen Golven en Optica

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2\sin((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$
- $\cos a + \cos b = 2\cos((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$
- $\cos a - \cos b = -2\sin((a+b)/2)\sin((a-b)/2)$
- $e^{iA} = \cos A + i \sin A$
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (sinusregel)
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (cosinusregel)
- $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$
- $E_k = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \vee \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2$
- $E_p = \frac{1}{2}F\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \vee \frac{1}{2}\gamma P_0\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2$
- $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, fasesnelheid mechanische golven; spankracht F, massa per lengte eenheid μ.
- amplitude-transmissiecoëfficiënt $\frac{2v_2}{v_2+v_1}$; amplitude-reflectiecoëfficiënt $\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}$
- $P(x,t) = F_y(x,t)v_y(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$, vermogen van een mechanische golf.
- $v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, geluidssnelheid ideaal gas
- $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$, Poynting vector.
- Dispersie relatie: ω als functie van k. Fasesnelheid $v_f(k) = \omega/k$. Groepsnelheid $v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$.
- $\sin\theta = m\frac{\lambda}{a}$ met $m = \pm1, \pm2, \cdots$, minima voor diffractie aan één spleet met breedte a.
- $I = I_0\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan één spleet met breedte b.
- $I = I_0\left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan n spleten met onderlinge afstand a en verwaarloosbare breedte.
- $\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}$ met $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, hoeken waar hoofdmaxima optreden voor een tralie met spleetafstand d.
- $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$, spectraal scheidend vermogen.
- $\sin\theta = m\frac{\lambda}{2d}$ met $m = 1, 2, 3, \cdots$, Bragg conditie. Constructieve interferentie treedt op bij diffractie aan series evenwijdige vlakken op onderlinge afstand d. De hoek θ is hier de hoek tussen verstrooide bundel en de evenwijdige kristalvlakken met atomen waaraan verstrooid wordt.