Tentamen Golven en Optica

woensdag 5 juli 2006, 9.00-12.00 uur

- Maak elke opgave op een apart vel.
- Gebruik van een grafische rekenmachine is niet toegestaan.
- Verdeel uw tijd optimaal over de opgaven.

Opgave 1. Lopende golven en interferentie op een snaar (35 punten)

We beschouwen transversale, lopende golven op een oneindig lange, ideale snaar (massa per lengte eenheid μ) opgespannen langs de x-as met spankracht F.

a) Laat zien, door toepassing van de golfvergelijking, dat $y_1(x,t) = g(x - vt)$ en $y_2(x,t) = f(x + vt)$ beide lopende golven zijn langs de snaar (g en f zijn willekeurige differentieerbare functies).

b) Geef, zonder berekening, een uitdrukking voor v.

c) In welke richting loopt $g(x - vt)$? En $f(x + vt)$? Motiveer kort je antwoord.

d) Geef voor de golf $g(x - vt)$ een uitdrukking voor de transversale kracht per lengte-eenheid $F_y(x,t)$ op het punt x en op tijdstip t. Controleer of de dimensie van je resultaat klopt.

We beschouwen nu het speciale geval waarbij op tijdstip $t = 0$ een naar rechts lopende puls gegeven wordt door

$$y_R(x,t) = \frac{0.1}{2 + x^2}$$

(y_R, x en t worden uitgedrukt in SI-eenheden). De snaareigenschappen zijn $F = 10$ N en $\mu = 100$ g/m.

e) Schets in één figuur de puls op tijdstippen $t_1 = 0$ s en $t_2 = 0.5$ s.

f) Geef de uitdrukking $y_R(x,t)$ voor de puls.

Een tweede, naar links lopende puls $y_L(x,t)$ wordt opgezet op dezelfde snaar, zodanig dat op $t = 0$ s de totale uitwijking van de snaar $y(x,t) = y_R(x,t) + y_L(x,t)$ overal precies nul is: $y(x,0) = 0$.

g) Geef de uitdrukkingen voor $y_L(x,0)$ en $y_L(x,t)$.

Opgave 2. Reflectie aan een grensvlak (25 punten)

Een vlakke lichtgolf valt vanuit medium 1 met brekingsindex n_1 onder een hoek θ_i in op een grensvlak met medium 2 met brekingsindex n_2. Er geldt $n_2 > n_1$. De hoeken van inval θ_i, reflectie θ_r, en breking θ_t zijn op de gebruikelijke wijze gedefinieerd. Het licht is gepolariseerd parallel aan het vlak van inval en reflectie. De *amplitudereflectiecoëfficiënt* $r_\parallel$ voor deze golf aan het grensvlak wordt gegeven door:

$$r_\parallel = \frac{n_2 \cos(\theta_i) - n_1 \cos(\theta_t)}{n_2 \cos(\theta_i) + n_1 \cos(\theta_t)}$$

a) Schets in een figuur het grensvlak, de lichtgolven met bijbehorende polarisatie.

b) Leid uit de uitdrukking voor $r_\parallel$ af dat $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ als θ_i gelijk is aan de Brewsterhoek. Hint: Toon aan dat dan geldt $\sin(2\theta_i) = \sin(2\theta_t)$ en gebruik hiervoor de identiteit $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$.

c) Leid vervolgens af dat voor de Brewsterhoek θ_p geldt: $\tan(\theta_p) = \frac{n_2}{n_1}$.

d) Laat aan de hand van de uitdrukking voor $r_\parallel$ en de in a) gemaakte schets zien dat de gereflecteerde golf bij loodrechte inval ($\theta_i = 0$) een fasesprong van π maakt.

We laten de golf nu vanuit medium 2 op het grensvlak met medium 1 vallen. De Brewsterhoek voor deze situatie noemen we $\theta_{p'}$.

e) Laat zien dat geldt: $\theta_p + \theta_{p'} = 90°$.

Opgave 3. Diffractie aan N identieke spleten (40 punten)

We beschouwen het diffractiepatroon van N identieke spleten met onderlinge afstand d. De spleten mogen oneindig smal worden verondersteld . De intensiteitverdeling van het Fraunhofer diffractiepatroon wordt gegeven door

$$I_N = I_0 \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)^2,$$

met $\alpha = kd\sin(\theta)/2$. Hierin is I_0 de maximum intensiteit van een enkele spleet. Dit patroon wordt zichtbaar gemaakt op een scherm op grote afstand van de spleten.

a) Laat zien dat de uitdrukking voor I_N voor het geval van twee spleten reduceert tot

$$I_2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{kd\sin(\theta)}{2}\right)$$

b) Schets in één figuur voor $N = 2$ en $N = 3$ het intensiteitpatroon op het scherm tussen de twee eerste hoofdmaxima ter weerszijden van het nulde orde maximum bij $\theta = 0$. Geef hierin duidelijk de ligging van de minima en (sub)maxima, evenals de waarden van de (sub)maxima, uitgedrukt in I_0.

c) Laat zien, voor het algemene geval van N spleten, dat de waarde van de hoofdmaxima gelijk is aan $N^2 I_0$.

d) Motiveer waarom dit niet in tegenspraak is met de wet van behoud van energie. Een berekening wordt niet verlangd.

We beschouwen nu de situatie waarbij de N spleten een eindige breedte $a < d$ hebben. De intensiteitverdeling van het Fraunhofer diffractiepatroon hiervan wordt aangeduid met $I_{N,a}$. Deze intensiteitverdeling is evenredig met het product van dat van de N oneindig smalle spleten en dat van een enkele spleet met breedte a.

e) Geef, zonder verder bewijs, $I_{N,a}$ uitgedrukt in N, I_0, k, d, a en θ.

Op het scherm blijkt het vierde orde hoofdmaximum afwezig te zijn.

f) Schets het diffractiepatroon voor deze situatie. Een ruwe schets, zonder kwantitatieve verhoudingen van diffractiemaxima, volstaat.

g) Hoe groot is d/a? Staaf dit met een korte berekening.