Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-105B werd in 2006/2007 gegeven door Dhr. A. Arts.

Mechanica (NS-105B)
17 december 2008

Opgave 1: Wetten van Newton *(30 punten)*

a) Op een deeltje met massa m werkt een exponentiële kracht $F(t) = Ame^{-bt}$. De randvoorwaarden zijn: op $t = 0$ is $x = 0$ en $v = 0$. Bereken $x(t)$.

b) Een deeltje met massa m heeft op het punt $x = a$ een snelheid v_0 in de richting van de oorsprong. Voor $x \geq 0$ ondervindt het deeltje een van de oorsprong afgerichte kracht $F(x) = Ax^{-2}$. Bereken de kortste afstand tot de oorsprong die het deeltje bereikt.

c) Gegeven is een vierkant raamwerk gevormd door 4 dunne latten met massa m en lengte l. Bereken het traagheidsmoment ten opzichte van een as loodrecht op het raamwerk door een van de hoekpunten.

Opgave 2: Strandbal *(30 punten)*

Een strandbal met massa m wordt met beginsnelheid v_0 verticaal omhoog gegooid. De wrijving met de lucht wordt in goede benadering gegeven door $F_w = -\alpha m v$ met α een positieve constante. De valversnelling is g.

a) Bereken het tijdstip T_1 waarop de bal het hoogste punt bereikt.

b) Bij het dalen van de bal nemen we aan dat de wrijving zo groot is dat de bal een constante snelheid v_e heeft voordat de grond bereikt wordt. Geef de grootte van deze snelheid.

Opgave 3: Murphy's law *(40 punten)*

Een net beboterde geroosterde boterham valt uit je handen met de beboterde kant bovenop. Na een val over een afstand H raakt de rand van de boterham de rand van de tafel, waardoor de snelheid verandert en de boterham gaat roteren met hoeksnelheid ω om het massamiddelpunt. Deze botsing is volledig elastisch. De hoogte van de tafel boven de grond is h. De vorm van boterham is een vierkant met lengte l en het traagheidsmoment t.o.v. het massamiddelpunt is $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ml^2$.
De vraag is hoe groot de hoogte H moet zijn opdat de boterham precies een halve omwenteling gemaakt heeft bij het neerkomen op de grond. Luchtwrijving wordt verwaarloosd. Doe de berekening volgens onderstaande stappen. De verschillende stappen kunnen onafhankelijk van elkaar uitgevoerd worden door gebruik te maken van de gegeven symbolen. Vul pas op het allerlaatste moment de gevonden waarden voor ω en v in.

a) Bereken de snelheid v_0 van de boterham net voor de botsing met de tafel.

b) Beargumenteer welke van de drie behoudswetten (mechanische energie, impuls, impulsmoment) tijdens de botsing geldig is (zijn). De botsingsduur is zo kort dat de zwaartekracht tijdens de botsing weinig tot geen invloed heeft op de beweging van de boterham en dus voor deze korte tijd verwaarloosd mag worden.

c) Bereken de snelheid v en de hoeksnelheid ω van de boterham meteen na de botsing.

d) Bereken vanaf de tafel de valtijd tot de grond en bepaal hiermee de conditie voor een halve omwenteling. Vul tot slot het antwoord van de onderdelen *a*) en *c*) in en los de vergelijking voor H op. (Het laatste vraagt enig vervelend rekenwerk, probeer de vergelijking voor H te schrijven als $\sqrt{1 + f(H)} = 1 + g(H)$ en kwadrateer). Antwoord-controle: voor $h = 1$ m en $l = 0.1$ m, $H \approx 3$ mm, verifiëer eventueel het antwoord met een potloodje.

Formuleblad Klassieke mechanica

Dynamica van een deeltje

- Newton: $\vec{\mathbf{F}} : \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$
- eenparig versnelde translatie: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t, \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$
- impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}, \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$.

Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ of $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} U = -\text{grad } U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U = \text{Constant}$.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$.
- Impuls: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i' \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i' + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\tau}$.
- Kinetische energie: $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}_1' + \vec{\mathbf{p}}_2'$;
  Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$.

Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho \vec{\mathbf{r}} dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$; $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV$; $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mL$ (dunne lat).
  Regel van Steiner (parallelle assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ (p is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
  Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Hemelmechanica

- Gravitatiewet: $\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$
- Potentiële energie: $U = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$
- Kepler 1: Banen in centraal $-\frac{k}{r^2}$ krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie E. Ellips: $E < 0$, Parabool: $E = 0$, Hyperbool: $E > 0$.
- Kepler 2: $mr^2\dot{\theta} = L = \text{constant}$ (perkenwet).
- Kepler 3: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$.

Trillingen

- Bewegingsvergelijking: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x$

Sinus- en cosinusfuncties

- $\sin 2a = 2\sin a \cos a; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$

Taylor-ontwikkeling

- Voor kleine ε geldt: $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \dots$

Engels – Nederlands

- Momentum — Impuls
- Angular momentum — Impulsmoment
- Impulse — Stoot
- Moment of inertia — Traagheidsmoment
- Torque — (Kracht)moment