Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-105B werd in 2006/2007 gegeven door Dhr. A. Arts.

Uitwerking[1] Mechanica (NS-105B)
17 december 2008

Opgave 1: Wetten van Newton *(30 punten)*

a) Newton: $F = m\frac{dv}{dt}$: $v(t) = \frac{1}{m}\int Ame^{-bt}\,dt = -\frac{A}{b}e^{-bt} + C$, randvoorwaarde invullen: $v(t) = \frac{A}{b}(1 - e^{-bt})$. Dan $x(t) = \int v(t)\,dt$, met randvoorwaarde wordt dit $x(t) = \frac{A}{b}(t + \frac{1}{b}e^{-bt} - \frac{1}{b})$.

b) Potentiële energie $U(x) = -\int F(x)\,dx = \frac{A}{x} + C$. Behoud van mechanische energie: $\frac{A}{a} + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{A}{x_0}$, waarin x_0 de kortste afstand is (hier is de snelheid nul): $x_0 = a/\left(1 + \frac{mv_0^2 a}{2A}\right)$.

c) Traagheidsmoment lattenraam: Vier keer de regel van Steiner toepassen: $I = 2\left(\frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2\right) + 2\left(\frac{1}{12}ml^2 + \frac{5}{4}ml^2\right) = \frac{10}{3}ml^2$.

Opgave 2: Strandbal *(30 punten)*

a) Bewegingsvergelijking: $-mg - \alpha mv = m\frac{dv}{dt}$. Scheiden van variabelen en integreren $t = -\int \frac{dv}{g+\alpha v} = -\frac{1}{\alpha}\ln(g + \alpha v) + C$. Randvoorwaarde invullen, $C = \frac{1}{\alpha}\ln(g + \alpha v_0)$. Op het hoogste punt is de snelheid nul, dus de tijd $T_1 = \frac{1}{\alpha}\ln(1 + \alpha v_0/g)$.

b) Als de snelheid constant is dan is de netto kracht nul, dus $mg = \alpha m v_e$, $v_e = g/\alpha$.

Opgave 3: Murphy's law *(40 punten)*

a) Behoud van mechanische energie: $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH$, $v_0 = \sqrt{2gH}$.

b) De botsing is volledig elastisch: er is behoud van mechanische energie. Tijdens de botsing werkt er een kracht van de tafel op de boterham, er is geen behoud van impuls. Als we als oorsprong de rand van de tafel nemen dan is er geen extern krachtmoment en is er behoud van impulsmoment t.o.v. dit punt.

c) Behoud mechanische energie voor en na de botsing, de beweging mag gesplitst worden in translatie van het massamiddelpunt en rotatie om het massamiddelpunt: $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2$, hieruit volgt $v_0^2 - v^2 = (v_0 - v)(v_0 + v) = \frac{1}{12}l^2\omega^2$.

   Behoud van impulsmoment t.o.v. de rand van de tafel, splits de beweging weer op: $\frac{1}{2}lmv_0 = \frac{1}{2}lmv + I_{\text{cm}}\omega$, hieruit volgt $v_0 - v = \frac{1}{6}l\omega$. Uit de energievergelijking volgt nu $v_0 + v = \frac{1}{2}l\omega$. Oplossen van twee vgln. met 2 onbekenden: $v = \frac{1}{2}v_0$ en $\omega = 3v_0/l$.

d) Valtijd tot de grond volgt uit de vergelijking: $h = vt + \frac{1}{2}gt^2$ ofwel $t = \frac{v}{g}(\sqrt{1 + 2gh/v^2} - 1)$. De boterham moet precies één keer omdraaien, dus $\omega t = \pi$ of $t = \pi/\omega$. We hebben nu na invullen van v, ω en v_0 een vergelijking voor H. $v^2 = \frac{1}{2}gH$ en $\omega v = \frac{3}{2}gH/l$ dus $\sqrt{1 + \frac{4h}{H}} = \frac{\pi l}{3H} + 1$, kwadrateren en oplossen naar H levert $H = l^2\pi^2/(36h - 6l\pi)$.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`