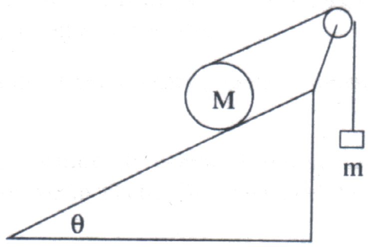
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-105b werd in 2008/2009 gegeven door Dr. A. Arts.

Klassieke mechanica (NS-105b)
30 januari 2009

Opgave 1: Rollen en transleren *(32 punten)*

Op een helling is over een schijf met massa M en straal R een touw gewikkeld. Het touw is via een massaloze katrol verbonden met een massa m, waarbij het touw evenwijdig loopt aan de helling. De schijf rolt slipvrij over de helling. Verder geldt dat de beweging van het touw over de katrol wrijvingsloos is en de massa van het touw verwaarloosd kan worden. De versnelling van de zwaartekracht is g.



a) Teken alle krachten werkzaam op de schijf en afzonderlijk op de massa m. Welke kracht(en) zijn aan elkaar gelijk en waarom?

b) Uit het slipvrij rollen volgt een relatie tussen de versnelling a_m van massa m en de versnelling a_s en hoekversnelling α van de schijf. Geef deze relatie. (De relatie mag ook gegeven worden voor de snelheden).

c) Bereken de versnelling van de massa m. Het traagheidsmoment van de schijf is $\frac{1}{2}MR^2$. Het probleem mag op verschillende manieren opgelost worden. (Vind je deze vraag lastig door de helling, neem dan aan dat de schijf over een horizontaal platform rolt, dit betekent wel een aftrek van 5 punten).

Opgave 2: Wetten van Kepler *(34 punten)*

Een satelliet met massa m beweegt in een cirkelvormige baan met straal R om de aarde. Op een gegeven moment wordt de richting van de snelheid van de satelliet instantaan veranderd. Het resultaat is dat het impulsmoment t.o.v. het centrum van de aarde met de helft is afgenomen. De totale mechanische energie is echter hetzelfde gebleven. De gravitatieconstante is G, de massa van de aarde M.

a) Bereken voor de cirkelbaan de snelheid v van de satelliet, het impulsmoment L t.o.v. het centrum van de aarde en de totale mechanische energie E.

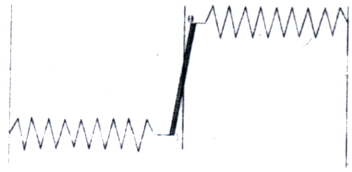
b) Bereken voor de nieuwe baan, uitgedrukt in R, de kortste (perihelium) en verste afstand (aphelium) van de satelliet tot het centrum van de aarde.

c) Op een van de MIT internet colleges mechanica wordt het volgende probleem behandeld. In een cirkelbaan om de aarde bevinden zich twee ruimtevaartuigen. De vaartuigen staan diametraal tegenover elkaar. De astronauten willen een postzak (of een tasje!) van de ene satelliet naar de andere satelliet sturen. Bedenk ene methode om dit te bewerkstelligen. Je kunt de snelheid van de postzak maar één keer veranderen en de *verandering* van deze snelheid moet kleiner zijn dan de snelheid van de satelliet. De derde wet van Kepler kan nuttig zijn. Je hoeft de manoeuvre niet door te rekenen, het gaat alleen om de methode.

Opgave 3: Trillingen

(34 punten)

Een staaf, lengte l en massa m kan draaien om zijn massamiddelpunt. De staaf is op de eindpunten door twee veren met veerconstante k met twee vaste punten verbonden (zie figuur). Op het tijdstip $t = 0$ maakt de staaf een kleine hoek θ met de verticaal en is de snelheid gelijk aan nul. De zwaartekracht speelt geen rol.



a) Geef de bewegingsvergelijking en de oplossing voor de uitwijking $\theta(t)$ van de staaf als functie van de tijd t.

De wisselwerking tussen de atomen van een twee-atomig molecuul wordt soms beschreven door de Morse potentiaal. Als de afstand tussen de atomen gelijk is aan x dan wordt de potentiële energie gegeven door $U(x) = U_0(1 - \exp(-(x - x_0)/\delta))^2$, hierin zijn U_0, x_0 en δ constanten.

b) Hoe groot is de evenwichtsafstand tussen de atomen? Dit is de afstand waarbij beide atomen in rust zijn.

c) Laat zien dat voor kleine uitwijkingen ($|(x-x_0)|/\delta \ll 1$) vanuit de evenwichtsstand de potentiële energiefunctie als functie van x een parabolische vorm heeft. Zie eventueel het formuleblad.

d) Bereken de frequentie van kleine trillingen om de evenwichtsstand. Neem voor de massa van het twee-atomig molecuul m.

Formuleblad Klassieke mechanica

Dynamica van een deeltje

- Newton: $\vec{\mathbf{F}} : \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$
- eenparig versnelde translatie: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t, \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$
- impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}, \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$.

Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ of $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} U = -\text{grad } U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U = \text{Constant}$.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$.
- Impuls: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i' \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i' + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\tau}$.
- Kinetische energie: $K = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}_1' + \vec{\mathbf{p}}_2'$;
  Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$.

Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho\vec{\mathbf{r}}dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$; $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV$; $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mL$ (dunne lat).
  Regel van Steiner (parallelle assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ (p is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
  Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Hemelmechanica

- Gravitatiewet: $\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- Potentiële energie: $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
- Kepler 1: Banen in centraal $-\frac{k}{r^2}$ krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie E. Ellips: $E < 0$, Parabool: $E = 0$, Hyperbool: $E > 0$.
- Kepler 2: $mr^2\dot{\theta} = L = \text{constant}$ (perkenwet).
- Kepler 3: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$.

Trillingen

- Bewegingsvergelijking: $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x$

Sinus- en cosinusfuncties

- $\sin 2a = 2\sin a \cos a; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$

Taylor-ontwikkeling

- Voor kleine ε geldt: $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \dots$

Engels – Nederlands

- Momentum — Impuls
- Angular momentum — Impulsmoment
- Impulse — Stoot
- Moment of inertia — Traagheidsmoment
- Torque — (Kracht)moment