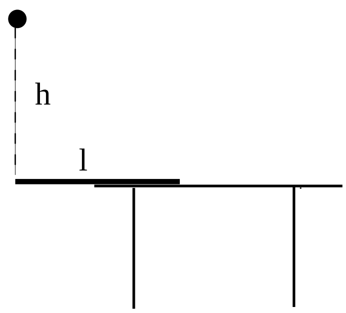
Julius Instituut
Universiteit Utrecht

Eindtoets MECHANICA, 1 februari 2008

Maak elke opgave op een apart vel. Zet op elk vel uw naam en studentnummer

Opgave 1: lineaal en knikker (30 punten)

Een plat lineaaltje met lengte l en massa M ligt zo op een horizontaal opgestelde tafel dat het voor de helft buiten de rand van de tafel uitsteekt. Men laat van hoogte h een knikker met massa m op het uiterste punt van het vrije uiteinde van het lineaaltje vallen. De botsing van de knikker met het lineaaltje is volkomen elastisch en de botsingsduur is zo kort dat de zwaartekracht tijdens de botsing geen effect heeft op de beweging van de knikker.

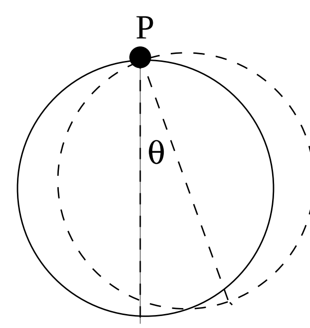


a) Welke behoudswetten zijn bij deze botsing van toepassing? Motiveer het antwoord.

b) Hoe groot moet de massa M van het lineaaltje zijn opdat de knikker meteen na de botsing (even) stilstaat?

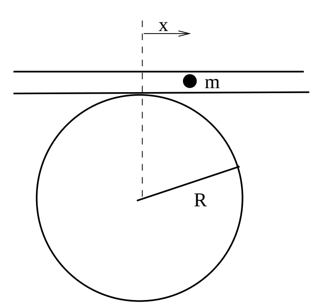
Opgave 2: Trillingen (35 punten)

Een uniforme schijf met massa M en straal R is opgehangen aan een punt P op zijn rand (zie figuur). De schijf kan slingeren om een as door P loodrecht op het vlak van tekening.



a) Leid af dat voor kleine uitwijkingen, de hoekfrequentie ω van deze slinger gelijk is aan $\sqrt{\frac{\alpha g}{R}}$. Wat is de waarde van α?

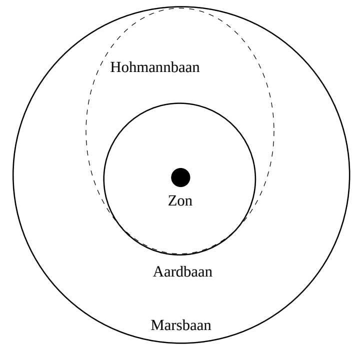
Een deeltje met massa m kan onder invloed van de zwaartekracht van een bolvormig lichaam met straal R en massa M, wrijvingsloos bewegen in een horizontale buis (zie figuur). De as van de buis is de x-richting. Pas op, de valversnelling g wordt in dit vraagstuk niet constant verondersteld!



b) Laat zien dat voor kleine uitwijkingen, $x/R \ll 1$, het deeltje een harmonische beweging uitvoert met frequentie $\omega = \sqrt{\alpha g/R}$, met g gelijk aan $g = GM/R^2$. Bepaal α. (Een Taylorontwikkeling: $(1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$ kan nodig zijn).

c) Op het tijdstip $t = 0$ is de positie van het deeltje x_0 en de snelheid v_0 gericht naar het midden, $x = 0$, van de buis. Geef de oplossing voor de plaats x(t) van het deeltje als functie van de tijd.

Opgave 3: Vlucht naar Mars (35 punten)



De meest efficiënte manier om in het zonnestelsel te reizen naar andere planeten maakt gebruik van Hohmann-transferbanen. Als we de banen van de planeten in goede benadering cirkelvormig om de zon nemen, dan is de Hohmann-baan een halve ellipsbaan waarbij het perihelium (kortste afstand tot brandpunt) en aphelium (verste afstand) raken aan de cirkelbanen van de aarde en de andere planeet (zie figuur). De straal van de aardbaan is R, de straal van de marsbaan is in redelijke benadering $3R/2$. De massa van de zon is M en de gravitatieconstante G. De uitkomsten moeten waar mogelijk in deze grootheden worden uitgedrukt.

a) Bereken de snelheid v_A van de aarde om de zon.

b) Vanuit de aardbaan wordt een ruimtesonde in de getoonde Hohmann-baan gebracht en naar Mars gestuurd. Dit gebeurt door kortstondig met raketten in het onderste raakpunt (zie figuur) de snelheid van de sonde te vergroten naar αv_A. Bereken de waarde van α waarvoor de sonde de marsbaan bereikt.

c) Aangekomen in het verste punt van de ellips wordt de snelheid van de sonde gelijkgemaakt aan de snelheid van Mars in de marsbaan. Bereken de hoeveelheid energie die de totale expeditie heeft gekost.

d) Bereken de vluchttijd.