HERKANSINGSTENTAMEN KLASSIEKE MECHANICA
vrijdag 20 maart 2009

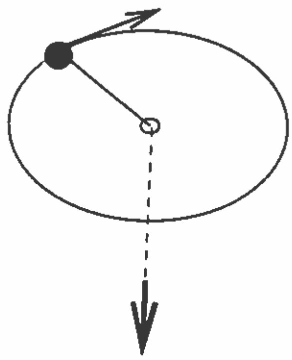
Opgave 1: Wetten van Newton (20 punten)

a) Een blok B met massa m_b rust op een blok A met massa m_a, het geheel staat op de grond. De wrijvingscoefficient tussen blok A en blok B is gelijk aan μ. Er is geen wrijving tussen de grond en blok A. Aan blok B wordt met een horizontale kracht F getrokken. Hoe groot is F op het moment dat blok B gaat slippen over blok A?

b) Op een deeltje werkt een remmende kracht $F = -bv^2$, waarin b een constante is en v de snelheid. Op $t = 0$ is de snelheid v_0. Op welk tijdstip is de snelheid tot de helft afgenomen.

Opgave 2: draaiend blok(25 punten)

Een blok met massa m beweegt met constante snelheid v in een cirkelbaan met straal r_1 op een wrijvingsloos oppervlak. Het blok wordt in de baan gehouden door een massaloos touw dat door een gat in het oppervlak gaat. Aan het touw wordt getrokken waardoor de straal van de cirkel afneemt tot r_2.



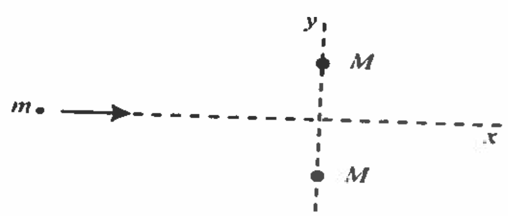
a) Welke behoudswet(ten) gelden hier. Motiveer!

b) Bereken de snelheid waarmee het blok ronddraait als de straal gelijk is aan r_2.

c) Bereken de arbeid die de trekkracht verricht heeft bij het reduceren van de straal.

Opgave 3: Massa in goot (30 punten)

Een massa m kan zonder wrijving glijden door een gladde goot die geplaatst is langs de x-as van een rechthoekig coördinatenstelsel. Op de posities $x = 0$, $y = \pm a$ bevinden zich twee bolvormige massa's M die de massa m volgens de gravitatiewet aantrekken.



a) Bereken de potentiële energie van de massa m als functie van x. Noem de gravitatieconstante G.

b) Op een gegeven moment bevindt m zich op de positie $x = -3a$ en beweegt met snelheid v in de richting van de positieve x-as. Druk de snelheid van m op de positie $x = 0$ uit in de grootheden v, m, M, G en a. (geen mooie uitdrukking!)

c) Laat zien dat voor kleine uitwijkingen, $x \ll a$, de massa m een harmonische trilling om de evenwichtsstand $x = 0$ gaat uitvoeren met een hoekfrequentie gelijk aan $\sqrt{\alpha MG/a^3}$. Geef de waarde van α (Hint: gebruik een Taylor-ontwikkeling).

Opgave 4: Satelliet om de aarde (25 punten)
Een satelliet met massa m beweegt in een cirkelbaan met straal R om de aarde (massa M). De satelliet wordt getroffen door een meteoriet met massa m die net voor de botsing met snelheid v_0 beweegt in de richting van het centrum van de aarde. De snelheid v_0 is gelijk aan de baansnelheid van de satelliet vóór de botsing. De botsing is volledig inelastisch, satelliet en meteoriet gaan als één geheel met massa $2m$ verder.

a) Bereken de mechanische energie en het impulsmoment t.o.v. het centrum van de aarde van de satelliet, (massa $2m$), na de botsing. Druk het antwoord uit in de grootheden G, de gravitatieconstante, M, m en R.

b) Bereken de kortste en grootste afstand (uitgedrukt in R) tot de aarde die de satelliet in de nieuwe baan bereikt. (Antwoord ter controle: de afstand van het brandpunt tot het middelpunt van de ellips is $\frac{1}{6}\sqrt{10}R$).

c) Maak een schets van de nieuwe baan van de satelliet. Let hierbij vooral op de positie van de aarde.

FORMULEBLAD KLASSIEKE MECHANICA

Dynamica van één deeltje

- Newton: $\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$, $\int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$.
- eenparig versnelde translatie: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t$, $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$
- impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$.

Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ of $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} U = -\mathrm{grad}\, U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U =$Constant.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$.
- Impuls: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}'}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}'}_i + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}; \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\tau}$.
- Kinetische Energie: $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}_1' + \vec{\mathbf{p}}_2'$;
  Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$.

Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho \vec{\mathbf{r}} dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$; $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV$; $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mL^2$ (dunne lat).
  Regel van Steiner (parallelle assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ (p is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
  Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Hemelmechanica

- Gravitatiewet: $\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- Potentiële energie $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$

- Kepler 1: Banen in centraal $-\frac{k}{r^2}$ krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie E. Ellips: $E < 0$, Parabool: $E = 0$, Hyperbool: $E > 0$.
- Kepler 2: $mr^2\dot{\theta} = L =$ constant (perkenwet).
- Kepler 3: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.
- Lange as theorema: $E = \frac{-GMm}{2a}$.

Trillingen

- Bewegingsvergelijking: $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x$

Sinus- en cosinusformules

- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$
- $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$

Taylor-ontwikkeling

- Voor kleine ϵ geldt: $(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \ldots$
- Reeksontwikkeling e-macht: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots.$

Engels - Nederlands

- Momentum - impuls
- Angular momentum - impulsmoment
- Impulse - stoot
- Moment of inertia - traagheidsmoment
- Torque - (kracht)moment