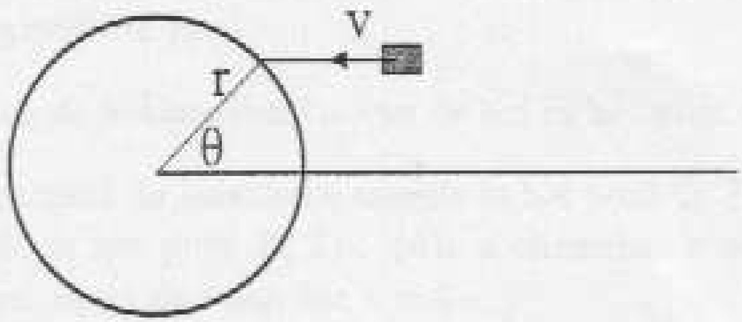
JULIUS INSTITUUT
UNIVERSITEIT UTRECHT

# Eindtoets MECHANICA

Maak elke opgave op een apart vel. Zet op elk vel uw naam en studentnummer

**Opgave 1: Draaimolen** (25 punten)

In een speeltuin springt een kind op een stilstaande draaimolen, waardoor de molen in beweging komt. De precieze situatie is weergegeven in onderstaande figuur. De draaimolen beschouwen we als een homogene schijf met straal $r$ en massa $M$. Het kind heeft een massa $m$ en beweegt met snelheid $v$ evenwijdig aan de getekende $x$-as. De plek waar het kind contact maakt met de draaimolen wordt gegeven door de hoek $\theta$ en de straal $r$.



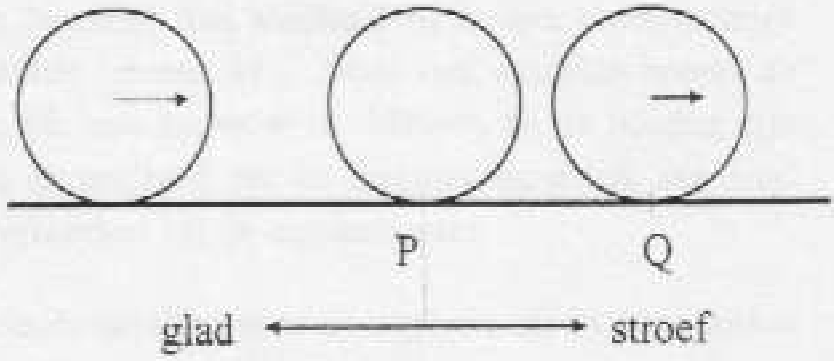

a) Welke behoudswet(ten) geld(en) er bij deze botsing?

b) Bereken de hoeksnelheid van de molen na de botsing.

c) Hoeveel mechanische energie is er bij de botsing verloren gegaan.

**Opgave 2: rollende bal** (30 punten)

Een homogene massieve bol met massa $m$ en straal $R$ glijdt zonder te rollen met een constante snelheid $v_0$ over een horizontaal volkomen glad oppervlak. Op het punt $P$ verandert het oppervlak plotseling van volkomen glad in stroef waardoor de bol aan het rollen wordt gebracht.




a) Teken alle krachten die op de bol werken als deze juist op het stroeve gedeelte is aangekomen. Op het moment dat de bol in $Q$ is aangekomen is het rollen net slipvrij. Teken weer alle krachten die op de bol werken. Beschrijf de beweging van de bol voorbij het punt $Q$.

b) Motiveer dat bij de overgang van de bewegingstoestand van de bol van het punt $P$ naar het punt $Q$ het totale impulsmoment $L$ t.o.v. het punt $P$ een behouden grootheid is.

c) Bereken de snelheid $v$ en de hoeksnelheid $\omega$ van de bol in het punt $Q$.

d) Bereken de verhouding tussen de kinetische energie in het punt Q, $T_Q$, en de kinetische energie in het punt $P$, $T_P$. (Als u onderdeel c niet heeft kunnen uitrekenen, neem dan aan dat $v = \frac{4}{7}v_0$.)

e) Bereken de lengte van $PQ$ als de wrijvingskracht tijdens de beweging van $P$ naar $Q$ constant is en de wrijvingscoëfficient tussen de bol en het stroeve oppervlak $f$ is.

**Opgave 3: satelliet om de aarde** (25 punten)

Een satelliet met massa $m$ beweegt met snelheid $v_0$ in een cirkelvormige baan met straal $r$ om de aarde (massa $M$). Door een explosie breekt de satelliet in twee fragmenten elk met massa $m/2$. Meteen na de botsing zijn de radiële componenten van de snelheid van de fragmenten gelijk aan $\pm v_0$. De tangentiële snelheid $v_0$ verandert bij de explosie niet.

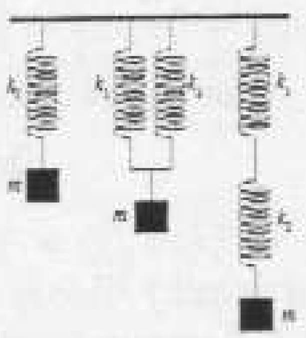
a) Druk de snelheid $v_0$ van de satelliet voor de explosie uit in de grootheden $G$, $M$ en $r$, waarin $G$ de gravitatieconstante is.

b) Bereken voor ieder fragment afzonderlijk de totale mechanische energie en het impulsmoment t.o.v. het centrum van de aarde. Druk het resultaat uit in $G$, $M$, $m$ en $r$.

c) Bereken de kortste afstand (uitgedrukt in $r$) tot de aarde die de fragmenten in hun baan bereiken.

**Opgave 4: veren** (20 punten)

Een massa $m$ is via één of twee massaloze veren aan het plafond bevestigd. De lengte van de veren in rust (zonder massa $m$) is $l$, de veerconstantes zijn $k_1$ en $k_2$. De versnelling van de zwaartekracht is $g$.



a) Bereken de afstand van $m$ tot het plafond in de drie getekende gevallen.

b) Bereken de frequentie van kleine trillingen om de evenwichtsstand in de drie getekende gevallen. Het alleen geven van het antwoord is onvoldoende!

# FORMULEBLAD KLASSIEKE MECHANICA

## Dynamica van één deeltje

- Newton: $\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$, $\int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}}\,dt = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$.
- eenparig versnelde translatie: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t$, $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$
- impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$.

## Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ of $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla}U = -\mathrm{grad}\,U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U =$Constant.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = 0$.

## Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{r}}_i$.
- Impuls: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{a}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\tau}$; $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}'_i \times m_i\vec{\mathbf{v}}'_i + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}$.
- Kinetische Energie: $K = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}'_1 + \vec{\mathbf{p}}'_2$;
  Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$.

## Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho\vec{\mathbf{r}}dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$; $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2\,dV$; $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mR^2$ (dunne lat).
  Regel van Steiner (parallelle assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ ($p$ is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
  Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

## Sinus- en cosinusformules

- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$
- $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$
- $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$