Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-105b werd in 2004/2005 gegeven door dr. ir. A.F.M. Arts.

Uitwerking[1] Klassieke Mechanica (NS-105b)
2 februari 2005

Opgave 1. Een horizontale lat *(25 punten)*

a) $\tau = \frac{mgL}{2}$.

b) $\alpha = \tau/I = mgL/2(\frac{1}{3}mL^2) = \frac{3}{2}g/L$.

c) $a = \alpha L/2 = \frac{3}{4}mg$.

d) $mg - F = \frac{3}{4}mg$, dus $F = mg/4$, omhoog gericht.

Opgave 2. Keplerbanen *(25 punten)*

a) Voor beide punten geldt behoud van mechanische energie en impulsmoment. Energie:

$$-\frac{GMm}{a} + \tfrac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{GMm}{2a} + \tfrac{1}{2}mv_2^2,$$

Impulsmoment: $mv_1 a = mv_2(2a)$. Invullen levert meteen $v_1 = 2v_2 = \sqrt{\frac{4GM}{3a}}$.

b) Vorm van de baan wordt bepaald door de totale mechanische energie, Parabool:

$$E = 0 = -\frac{GMm}{qR_A}.$$

Voor de cirkelbaan van de aarde geldt $v_A^2/R_A = GM/R_A^2$, invullen levert $d^2q = 2$.

Opgave 3. Draaimolen *(25 punten)*

a) Geen behoud van mechanische energie (inelastische botsing), geen behoud van impuls (externe kracht door middelpunt van draaimolen), wel behoud van impulsmoment t.o.v. middelpunt draaimolen voor systeem kind + draaimolen.

b) $L_{\text{voor}} = L_{\text{na}}$. $\quad mvr\sin\theta = I\omega, \quad I = \frac{1}{2}Mr^2 + mr^2$. Hieruit volgt $\omega = \dfrac{2mv\sin\theta}{(M+2m)r}$.

c) $U_{\text{voor}} = \frac{1}{2}mv^2, \quad U_{\text{na}} = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad \Delta U = \frac{1}{2}mv^2\left(1 - \dfrac{2m\sin^2\theta}{M+2m}\right)$

Opgave 4. Lat tussen twee veren *(25 punten)*

a) Draaiing om het punt P: $\tau = I_P\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Voor een kleine hoek θ is de indrukking van de bovenste veer $x_b = \theta L$ en de uitrekking van de onderste veer $x_u = \theta L/2$. Het krachtmoment t.o.v. P is dus gelijk aan $\tau = -kx_bL - kx_uL/2$ (let op de richtingen). Invullen levert

$$\tau = -\tfrac{5}{4}kL^2\theta = \tfrac{1}{3}mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ of } \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\tfrac{15}{4}(k/m)\theta.$$

Dit is de standaard differentiaalvergelijking voor een harmonische beweging met $\omega = \sqrt{\frac{15}{4}k/m}$.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@A-Eskwadraat.nl

b) De algemene oplossing is $\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Invullen van de randvoorwaarden, $t = 0$:

$$\theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{L} \text{ levert } \theta(t) = \frac{v_0}{L\omega}\sin(\omega t)$$

c) De zwaartekracht resulteert in een extra moment $\tau_g = mg\theta L/2$ tegengesteld gericht aan het moment van de veren. De beweging blijft harmonisch als $(-\frac{5}{4}kL^2 + mgL/2) < 0$, hieruit volgt $k > \frac{5}{2}mg/L$.