DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE NS-105B WERD IN 2004/2005 GEGEVEN DOOR TOINE ARTS.

Klassieke Mechanica, tussentoets (NS-105b)
17 december 2004

Opgave 1: Variabele wrijvingskracht

Een blok met massa m beweegt wrijvingsloos op een tafel. De beweging wordt echter beperkt door een vaste ring met straal l. Op het tijdstip $t = 0$ beweegt het blok langs de binnenkant van de ring met snelheid v_0, het blok draait dus rondjes maar ondervindt wrijving met de ring. De wrijvingscoëfficiënt tussen het blok en de ring is gelijk aan f.

a) Laat zien dat de grootte van de wrijvingskracht tussen blok en ring gelijk is aan cv^n, waarin v de snelheid langs de ring is. Bepaal de grootte van n en druk c uit in gegeven grootheden.

b) Stel de bewegingsvergelijking op en bereken vervolgens de grootte van de snelheid van het blok als functie van de tijd.

c) Bereken de door het blok afgelegde weg als de snelheid tot de helft van de beginsnelheid is afgenomen.

Opgave 2: Kracht en potentiële energie

Een deeltje met massa m beweegt langs de positieve x-as. Op het deeltje werken twee krachten; een constante kracht W gericht naar de oorsprong en een van de oorsprong af gerichte afstotende kracht met grootte $F = A/x^3$.

a) Bereken de potentiële energie $U(x)$ van de massa op de positie x.

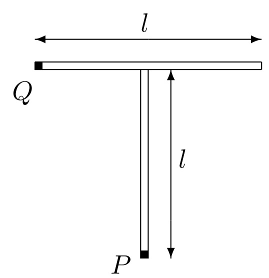
b) Schets de potentiële energie $U(x)$ als functie van x. Stel hierbij dat in het minimum de potentiële energie gelijk is aan nul. Als u onderdeel a) niet heeft kunnen uitrekenen, of twijfelt over het antwoord, neem dan het foutieve antwoord $U(x) = Ax + B/x$, met A en B positieve constanten.

c) Bereken de positie x_0 waar een deeltje in stabiel evenwicht is. Leg ook uit waarom deze positie stabiel is.

d) Het deeltje heeft op de positie $x = x_0$ (zie onderdeel c), een snelheid v_0. Geef de algebraïsche vergelijking waarmee de uiterste punten van de beweging berekend kunnen worden.

Opgave 3: Traagheidsmoment

Op een gladde tafel ligt een T-constructie, bestaande uit twee dunne latten, elk met lengte l en massa m. Bereken het traagheidsmoment van de constructie t.o.v. de volgende assen.



a) De as door het punt P, loodrecht op het papier.

b) De as door het punt Q, loodrecht op het papier.

c) De T-constructie kan nu draaien om het punt P. Op een afstand $l/2$ van P wordt er een kogel met massa M en snelheid v in de lat geschoten. Bij deze inelastische botsing blijkt na afloop dat de helft van de kinetische energie aan warmte verloren is gegaan. Met welke hoeksnelheid gaat de T-constructie om P roteren? Druk het antwoord uit in de gegeven grootheden.

Formuleblad Klassieke mechanica

Dynamica van een deeltje

- Newton: $\vec{\mathbf{F}} : \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$
- eenparig versnelde translatie: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t, \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$
- impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}, \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$.

Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ of $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla}U = -\text{grad } U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U = \text{Constant}$.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$.
- Impuls: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}'_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}'_i + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}$; $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\tau}$.
- Kinetische energie: $K = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}'_1 + \vec{\mathbf{p}}'_2$;
  Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$.

Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho\vec{\mathbf{r}}dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$; $I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV$; $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mL$ (dunne lat).
  Regel van Steiner (parallelle assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ (p is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
  Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Hemelmechanica

- Gravitatiewet: $\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- Potentiële energie: $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
- Kepler 1: Banen in centraal $-\frac{k}{r^2}$ krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie E. Ellips: $E < 0$, Parabool: $E = 0$, Hyperbool: $E > 0$.
- Kepler 2: $mr^2\dot{\theta} = L = \text{constant}$ (perkenwet).
- Kepler 3: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$.

Trillingen

- Bewegingsvergelijking: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x$

Sinus- en cosinusfuncties

- $\sin 2a = 2\sin a \cos a; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2\sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$
- $\cos a + \cos b = 2\cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$

Taylor-ontwikkeling

- Voor kleine ε geldt: $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \ldots$

Engels – Nederlands

- Momentum — Impuls
- Angular momentum — Impulsmoment
- Impulse — Stoot
- Moment of inertia — Traagheidsmoment
- Torque — (Kracht)moment