Julius Instituut
Universiteit Utrecht

Opgave 1: Een schip door water (25 punten)

a) Tweede wet van Newton $F = -bv = m\frac{dv}{dt}$. Scheiden van variabelen: $\int_0^t dt = -\frac{b}{m}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}$ oplossen: $v = v_0 \mathrm{e}^{-bt/m}$. Alternatief: probeer $v = A\mathrm{e}^{\lambda t}$ als oplossing.

b) $s = \int_0^\infty v(t)dt = -\frac{mv_0}{b}\mathrm{e}^{-bt/m}|_0^\infty = \frac{mv_0}{b}$

c) Als de motoren aanstaan is de voortstuwende kracht van de motoren gelijk aan de wrijvingskracht bv. Vermogen is arbeid per seconde, $P = Fv = bv_0^2 = 36 \times 10^6$, hieruit volgt $b = 36 \times 10^6/100 = 36 \times 10^4$ kg/s, ($v_0 = 10$ m/s). Af te leggen weg: $s = \frac{mv_0}{b} = \frac{36\times 10^6 \times 10}{36\times 10^4} = 1000$ m.

Opgave 2: Satelliet naar de zon (25 punten)

a) Cirkelbeweging $\frac{mv_0^2}{r_1} = \frac{GmM}{r_1^2}$, oplossen: $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$.

b) Twee behoudswetten: behoud van mechanische energie en behoud van impulsmoment. Pas deze toe voor de punten A en P. Energiebehoud: $\frac{-GmM}{r_1} + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{-GmM}{r_2} + \frac{1}{2}mv_P^2$. Impulsmomentbehoud: $mv_1r_1 = mv_Pr_2$ (v en r staan loodrecht op elkaar). Dit zijn 2 vergelijkingen met 2 onbekenden v_P en v_1. $v_P = \frac{1}{8}v_1$, invullen in energiebehoud, $v_1 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \frac{4}{3}v_0$, $v_P = \frac{1}{6}v_0$.

c) Energieverandering bij direct afremmen: $\Delta E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$, in twee stappen: $\Delta E_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}(\frac{16}{9} - 1 + \frac{1}{36})mv_0^2$, ΔE_2 is kleiner dan ΔE_1.

Opgave 3: Massa in goot (25 punten)

a) $U(x) = -2\frac{GmM}{\sqrt{x^2+a^2}}$

b) Er geldt behoud van mechanische energie: $-2\frac{GmM}{\sqrt{10a^2}}+\frac{1}{2}mv_0^2 = -2\frac{GmM}{a}+\frac{1}{2}mv_{(x=0)}^2$

c) Schrijf $U(x)$ als $U(x) = -2\frac{GmM}{a\sqrt{1+(x/a)^2}}$. Taylor ontwikkeling, zie formuleblad ($n = -\frac{1}{2}$): $U(x) = -2\frac{GmM}{a} + \frac{GmM}{a^3}x^2$. Dit is een kwadratische afhankelijkheid van x die ook voor een veer geldt met veerconstante $k = \frac{2GmM}{a^3}$. De hoekfrequentie is dan gelijk aan $\sqrt{k/m} = \sqrt{2MG/a^3}$. Alternatief: Reken de kracht uit met $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ en laat zien dat deze in de buurt van $x = 0$ in goede benadering evenredig is met x.

Opgave 4: Een lat en een veer (25 punten)

a) Als de lat over een hoek θ gedraaid wordt, dan wordt de veer uitgerekt met een lengte $\frac{1}{2}l\sin\theta$. Het krachtmoment τ t.o.v. het draaipunt is dan gelijk aan $\tau = -\frac{1}{2}lk\sin\theta\frac{1}{2}l\cos\theta$ (denk aan uitprodukt! en - teken). Pas toe $\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$ met $I = \frac{1}{12}Ml^2$. Met de gegeven benaderingen leidt dit tot $d^2\theta/dt^2 = -\frac{3k}{M}\theta$, dus $\omega = \sqrt{\frac{3k}{M}}$.

b) Algemene oplossing $\theta = A\cos(\omega t + \phi)$. Randvoorwaarden: $t = 0$: $\theta = \theta_0$ en $d\theta/dt = -A\omega\sin(\omega t + \phi) = 0$. Hieruit volgt $\theta(t) = \theta_0\cos\omega t$

c) Het is een inelastische botsing en er zijn externe krachten in het draaipunt. Er geldt dus voor de lat alleen de wet van behoud van impulsmoment t.o.v. het draaipunt. (Hierbij is impliciet aangenomen dat de veer tijdens de botsing niet ingedrukt wordt.) Impulsmoment voor de botsing $L_v = m\frac{1}{2}lv$, na de botsing $L_n = I\omega_0$. Hieruit volgt $\omega_0 = d\theta/dt = 6vm/lM$

d) Nieuwe randvoorwaarden: $t = 0$: $\theta = 0$ en $d\theta/dt = -A\omega\sin(\omega t + \phi) = \omega_0$. Hieruit volgt $\theta = (\omega_0/\omega)\cos(\omega t - \pi/2)$.