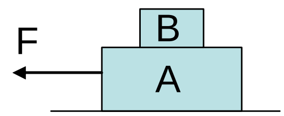
Julius Instituut
Universiteit Utrecht

Uitwerking tussentoets MECHANICA 2007-2008

Opgave 1: Wetten van Newton (36 punten)

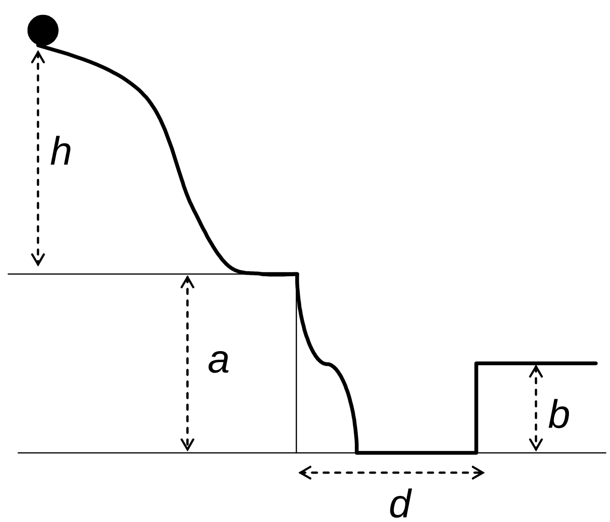


a) Wrijvingskracht met de grond:$F_{max} = \mu g(m_a + m_b)$. Beschouw eerst het geheel: $F - F_{max} = (m_a + m_b)a$, beschouw nu alleen blok B. Maximale wrijvings kracht is $F_{BA} = \mu g m_b$. Slippen als $a = F_{BA}/m_b = \mu g$, invullen: $F = 2\mu g(m_a + m_b)$.

b) Bewegingsvergelijking $-bv^{3/2} = m\frac{dv}{dt}$, met als randvoorwaarde $v = v_0$ op $t = 0$. Scheiden van variabelen en integreren: $\int \frac{b}{m}dt = -\int v^{-3/2}dv$. Dus $\frac{bt}{m} = \frac{2}{\sqrt{v}} + C$, de constante C is gelijk aan $C = -\frac{2}{\sqrt{v_0}}$. Als de snelheid $v = v_0/4$ dan is $t = \frac{2m}{b\sqrt{v_0}}$.

c) Potentiële energie $U = -\int F(x)dx = \frac{1}{3}ax^3 + C$. Behoud van mechanische energie: $\frac{1}{2}mv_0^2 + C = 0 + \frac{1}{3}x^3 + C$, dus $x = (\frac{3mv_0^2}{2a})^{\frac{1}{3}}$.

Opgave 2: Knikkerbaan (32 punten)



a) Behoud van mechanische energie: snelheid op hoogte a: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, verder geldt $v = \omega r$ en $I = \frac{2}{5}mr^2$. Invullen: $v^2 = \frac{10}{7}gh$. Voorwaarde om niet in de put te geraken: bereken eerst de valtijd: $t^2 = \frac{2(a-b)}{g}$. Om over de put te komen moet $vt \geq d$, dus $v^2 = d^2/t^2$. Invullen levert $h = \frac{7d^2}{20(a-b)}$.

b) Behoud van mechanische energie geeft nu $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, verder analoog aan a), resultaat: $h = \frac{d^2}{4(a-b)}$.

c) Er geldt behoud van impulsmoment t.o.v punten op de lijn die door de contactpunten van de knikker met de grond gaat. Op het moment van raken is het impulsmoment $L_v = mvr$, er is geen rotatie. Op het monent van slipvrij rollen is het impulsmoment $L_n = mru + I\omega$, waarin I het traagheidsmoment t.o.v. het massamiddelpunt is. Met de slipvrije rolvoorwaarde $v = \omega r$ volgt $u = \frac{5}{7}v$.

Opgave 3: Kermisattractie? (32 punten)

a) Massamiddelpunt van de T ligt op een afstand $\frac{3}{4}l$ van de draaias. Het traagheidsmoment t.o.v de draaias is met de parallelle-assenstelling gelijk aan $I_A = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + ml^2 = \frac{17}{12}ml^2$.

b) Er is behoud van mechanische energie, de zwaartekracht is conservatief en de krachten op de as verrichten geen arbeid. Er is geen behoud van impuls, er is een externe kracht(zwaartekracht). Er is geen behoud van impulsmoment, er is als de T draait een extern moment van de zwaartekracht t.o.v. de draaias.

c) Uit behoud van mechanische energie volgt $\frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = 2mg(2\frac{3}{4}l)$. (Voor het bereke-nen van de potentiële enegie moet de massa van de T in het massamiddelpunt geplaatst worden.). De kracht van de as op T kan bepaald worden uit het feit dat het massamiddelpunt een cirkelbeweging maakt en er dus een centripetaal gerichte versnelling is. Deze versnelling wordt veroorzaakt door de resulterende kracht op het massamiddelpunt. In de bovenste stand: $S_1 + 2mg = \frac{2mv_1^2}{\frac{3}{4}l} = 2m\omega_1^2(\frac{3}{4}l)$, analoog in de onderste stand: $S_2 - 2mg = \frac{2mv_2^2}{\frac{3}{4}l} = 2m\omega_2^2(\frac{3}{4}l)$. Hieruit volgt $S_2 - S_1 = 4mg + \frac{3}{2}ml(\omega_2^2 - \omega_1^2)$. Invullen van de energievergelijking resulteert in het antwoord $S_2 - S_1 = mg(4 + \frac{9}{\alpha})$. In de berekening is aangenomen dat de resulterende kracht aangrijpt in het massamiddelpunt. Dat is hier waar maar niet triviaal. Studenten die dit opmerken kunnen een bonuspunt verdienen.

Prettige feestdagen!