Hertentamen TF1
16 maart 2009
9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 20 onderdelen, verdeeld over 4 opgaven.
Met elke onderdeel zijn 5 punten te verdienen.
Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam.

Opgave 1 en 2 bestaan elk uit 5 onderdelen (a) t/m (e).
Opgave 3 en 4 bestaan uit 6 en 4 onderdelen, respectievelijk.

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met T, en de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K. Ook gebruiken we soms de afkorting $\beta = 1/(k_B T)$. Tevens mag u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro aan $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante aan $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa.

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE PAGINA.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG —IN GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN AFSCHATTING VAN ~ 1 SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN GROOTTE.

Opgave 1

We beschouwen een enkel deeltje dat zich in 2 microtoestanden kan bevinden, ofwel in de grondtoestand met energie 0 ofwel in de aangeslagen toestand met energie ϵ, met $\epsilon > 0$. Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

(a) Wat is dan de kans dat het deeltje in de aangeslagen toestand zit?

(b) Bereken de gemiddelde energie van dit deeltje.

(c) Geef op basis van fysische argumenten (of eventueel m.b.v. uw resultaat bij onderdeel (b)) de gemiddelde energie van dit deeltje in (i) de hoge-T en (ii) de lage-T limiet.

We beschouwen nu een deeltje dat zich in oneindig veel microtoestanden kan bevinden, met energie $\epsilon_n = n\epsilon$ in microtoestand $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Wederom is $\epsilon > 0$, en de temperatuur T.

(d) Bereken de partitiesom $Z_1(T)$ van dit deeltje.

(e) Bereken de entropie $S(T)$ van dit deeltje.

Opgave 2 —begin op een nieuw vel s.v.p.

(a) Een motor gebruikt 3/5 van de energie van de verbruikte brandstof voor (nuttig) vermogen, terwijl 2/5 als restwarmte wordt gedumpt in de buitenlucht op temperatuur $T_1 = 300$K. Bereken de temperatuur T_2 die de verbrandingskamer minstens moet hebben.

(b) Beschouw een klassiek ideeal gas op kamertemperatuur onder atmosferische druk in een fles met een volume van 1 liter. Hoeveel gas deeltjes bevat de fles?

(c) Lucht op zeeniveau bestaat voor 80% uit stikstof en 20% uit zuurstof, maar op de top van Mount Everest is de compositie van lucht anders. Geef een uitdrukking voor de fractie (f_O) zuurstof in lucht als functie van de hoogte z boven zee, aannemende dat de temperatuur T constant is, en dat lucht zich als een ideaal gas gedraagt. Noem de gravitatieversnelling g en de massa van een molecuul stikstof en zuurstof m_N en m_O, respectievelijk.

(d) Laat zien dat

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \tag{1}$$

waarbij S de entropie, p de druk, T de temperatuur, en V het volume is van een of ander thermodynamisch systeem.

(e) Maak een schetsje van ongeveer 10-20 colloïdale staafjes (getekend als streepjes) in (i) de isotrope fase en (ii) de nematische fase. Beredeneer welke van de twee fasen de hoogste concentratie heeft.

Z.O.Z. VOOR HET VERVOLG

Opgave 3 —begin op een nieuw vel s.v.p.
We beschouwen een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes, elk met massa m. De temperatuur is T, het volume V.

(a) Geef de correct genormeerde kans $f(v_x)dv_x$ om een willekeurig gekozen gasdeeltje aan te treffen met een snelheid in de x-richting in een klein interval dv_x rondom v_x.

(b) Laat zien dat de gemiddelde kinetische energie van het gas gelijk is aan $E_{kin} = 3Nk_BT/2$. Heeft het gas ook potentiële energie?

Het gas wordt langzaam (reversibel) gecomprimeerd van het begin-volume V naar het eind-volume $V/2$. Tijdens de compressie wordt aan het gas een hoeveelheid warmte Q toegevoerd, wordt op het gas een hoeveelheid arbeid W verricht, en verandert de energie van het gas met ΔE. Het aantal deeltjes is onveranderd N.

(c) Bereken Q, W, en ΔE voor het geval dat de compressie isobaar verloopt.

(d) Laat voor het geval dat de compressie adiabatisch verloopt eerst zien dat gedurende dit proces de druk p en het volume V steeds zodanig zijn $p = cV^{-5/3}$ met c een constante, en bereken vervolgens Q, W, en ΔE.

Het gas veronderstellen we niet langer ideaal, dus de wisselwerking tussen de deeltjes kan niet meer verwaarloosd worden. Als we de paar potentiaal van twee deeltjes op afstand r van elkaar $u(r)$ noemen, dan wordt de tweede viriaal coefficient zoals u weet gegeven door
$B_2 = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}[1 - \exp(-\beta u(r))]$.

(e) Schets $u(r)$ voor een een edelgas zoals Argon, en bespreek kort de fysische betekenis.

(f) Bereken B_2 voor harde bollen met een diameter σ.

Opgave 4 —begin op een nieuw vel s.v.p.
Een klassiek deeltje met massa m is in thermisch evenwicht met een vloeistof op temperatuur T. Het deeltje zit vast aan een harmonische ("Hookse") veer en kan daarom alleen bewegen op een horizontale 1-dimensionale lijn $-\infty < x < \infty$. De positie van het deeltje is $x = 0$ als de veer in evenwicht is, maar door thermische beweging kan het deeltje de veer indrukken en uitrekken. De kansverdeling $W(x)$ om het deeltje op positie x aan te treffen blijkt evenredig te zijn met $\exp[-x^2/(2\sigma^2)]$ voor zekere σ.

(a) Bereken de veerconstante C als functie van m, σ, k_B, en/of T.

(b) Bereken de gemiddelde kwadratische verplaatsing van het deeltje.

Hetzelfde deeltje wordt nu losgemaakt van de veer en kan dus als een Browns deeltje op de hele x-as door de vloeistof bewegen. De diffusie coefficient noemen we D, en de kansverdeling $P(x,t)$ om het deeltje op tijdstip $t > 0$ op positie x aan te treffen voldoet aan de 1-dimensionale diffusie vergelijking

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Verder is gegeven dat het deeltje zich op $t = 0$ bevindt op $x = 0$.

(c) Bereken $P(x,t)$. Hint: een Fourier transformatie kan handig zijn.

(d) Bereken de gemiddelde verplaatsing $\langle x\rangle(t)$ en de gemiddelde kwadratische verplaatsing $\langle x^2\rangle(t)$, ofwel m.b.v. uw resultaat bij (c) ofwel op andere wijze (met argumenten).

EINDE