DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE NS-201B WERD IN 2007/2008 GEGEVEN DOOR DR. R. VAN ROIJ.

# Thermische Fysica 1 (NS-201B)
# 30 januari 2008

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Met opgave 1 zijn 25 punten te verdienen, met opgave 2, 3, en 5 zijn elk 20 punten te verdienen, en met opgave 4 zijn 15 punten te verdienen.
Blijf niet hangen bij een onderdeel dat niet meteen lukt, er zijn genoeg andere onderdelen!
Net als in het boek en in het college wordt in dit tentamen met $T$ de absolute temperatuur bedoeld (in Kelvin), en met $\tau = k_b T$ de fundamentele temperatuur (in Joule). Hier is $k_b = 1.3810^{-23} J/K$ de constante van Boltzmann. Ook noemen we de thermodynamische entropie S (in Joule/Kelvin), en de dimensieloze entropie is $\sigma = S/k_b$. U mag uw eigen voorkeur (per vraag) aanpassen.
SCHRIJF DUIDELIJK S.V.P. EN BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN KORT EN BONDIG. ZORG ER TEVENS VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE PAGINA.
REKENMACHINES ETC. ZIJN NIET TOEGESTAAN.

## Opgave 1

We beschouwen een systeem van $N$ identieke deeltjes op vaste posities in een regelmatig rooster. Elk deeltje kan in 2 toestanden zitten, ofwel in de grondtoestand met energie $-\epsilon$, ofwel in de aangeslagen toestand met energie $+\epsilon$. Er geldt dat $\epsilon > 0$, er zijn geen onderlinge wisselwerkingen tussen de deeltjes, en $N >> 1$.

a) Geef twee fysische systemen die door dit model beschreven worden.

b) Wat is het totaal aantal microtoestanden van dit systeem?

We nemen nu aan dat het systeem thermisch geisoleerd is, met een gegeven energie $U = n\epsilon$, met $n = N_+ - N_-$. Hier is $N_-$ het aantal deeltje in de grondtoestand, en $N_+ = N - N_-$. het aantal deeltjes in de aangeslagen toestand.

c) Bereken de multipliciteit $g(N, n)$ en m.b.v. de Stirling benadering de entropie $\sigma(N, n)$. Geef aan voor welke waarde(n) van $n/N$ de entropie maximaal en minimaal is, respectievelijk.

d) Geef aan hoe u de temperatuur $\tau(N, n)$ zou berekenen (u hoeft de berekening dus niet uit te voeren).

De thermische isolatie wordt nu verwijderd, en het systeem wordt vervolgens in thermische evenwicht gebracht met een warmtebad op temperatuur $\tau$. Het aantal deeltjes blijft onveranderd $N$.

e) Bereken de kanonieke 1-deeltjes partitiesom $Z_1(\tau)$.

f) Bereken de kans $P_-$ dat een gegeven deeltje zich in de grondtoestand bevindt, en ook de kans $P_+$ dat het deeltje zich in de aangeslagen toestand bevindt.

g) Bereken de gemiddelde energie $u$ van een gegeven deeltje, en schets $u(\tau)$ voor $\tau \in [0, \infty)$. Geef op de $\tau$-as de waarde $\epsilon$ aan, en op de $u$-as de de hoge-$\tau$ en lage-$\tau$ limietwaarden aan van $u$. Bespreek kort waarom deze limietwaarden fysisch (on)redelijk zijn.

h) Laat zien dat de N-deeltjes kanonieke partitiesom

$$Z_N(\tau) = \sum_{n_1=\pm1} \sum_{n_2=\pm1} \cdots \sum_{n_N=\pm1} \exp(-\epsilon(n_1 + n_2 + \cdots + n_N)/\tau) \tag{1}$$

gelijk is aan $Z_1(\tau)^N$. Bereken hieruit de gemiddelde totale energie $U$ van het systeem, alsmede de bijbehorende standaard deviatie $\delta U$.

## Opgave 2

We beschouwen een klassiek ideaal gas van $N$ puntdeeltjes bij een beginvolume $V_1$ en een begintemperatuur $T_1$. Het gas is in thermisch en mechanisch evenwicht.

a) Geef een uitdrukking voor de begin-druk $p_1$ van het gas.

b) Wat is de begin-energie $E_1$ van het gas? Is dit alleen kinetische energie, of alleen potentiële energie, of een combinatie van beide?

Het gas wordt vervolgens langzaam (reversibel) geëxpandeerd tot een viervoudig volume $V_2 = 4V_1$, waarbij het gas een hoeveelheid warmte $q$ opneemt en een hoeveelheid arbeid $w$ verricht. Na deze expansie is de druk van het gas $p_2$, de temperatuur $T_2$, en de energie $E_2$. Het aantal deeltjes blijft onveranderd $N$.

c) Bereken de vijf grootheden $T_2$, $p_2$, $E_2$, $w$, en $q$ voor het geval dat de expansie isothermisch plaatsvindt.

d) Bereken voor de condities onder (c) de entropie verandering van het gas. Zou de entropie verandering van het gas groter, kleiner, of even groot zijn geweest indien de expansie naar de nieuwe toestand irreversibel geweest zou zijn?

In het vervolg van deze opgave gaan we er van uit dat de viervoudige expansie niet isotherm maar adiabatisch plaatsvindt. De expansie blijft nog wel een langzaam (quasi-statisch) proces.

e) Bereken voor de adiabatische expansie de vijf grootheden T$T_2$, $p_2$, $E_2$, $w$, en $q$ (bepaal zelf de handigste volgorde, en gebruik eventueel dat $p_2V_2^{5/3} = p_1V_1^{5/3}$).

f) Bereken de entropie verandering van het gas tijdens deze adiabatische expansie.

## Opgave 3

We beschouwen een klassiek puntdeeltje met massa $m$ op de $x$-as (dus de ruimtelijke dimensie is 1), in een harmonische externe potentiaal gecentreerd rond $x = 0$. De energie van het deeltje schrijven we dus als '

$$E(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} \tag{2}$$

met $p$ de impuls in de $x$-richting en $\omega$ de eigenfrequentie van de oscil1ator. Het deeltje is in contact met een warmtebad op temperatuur $\tau$, en de kanonieke partitiesom is dus gegeven door

$$Z = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-E(x,p)/\tau), \tag{3}$$

met $h$ de constante van Planck.

a) Laat zien dat $Z = \tau/(\hbar\omega)$ met $\hbar = h/(2\pi)$.

b) Geef de correct genormeerde kansverdeling $W(x)$ om het deeltje op positie $x$ aan te treffen. Hangt $W(x)$ af van $h$?

c) Bereken de thermische gemiddelden $< x >$ en $< x^2 >$.

Indien ditzelfde deeltje in dezelfde potentiaal niet klassiek maar quantummechanisch wordt beschreven, dan blijken de mogelijke energie toestanden van het deeltje gegeven te zijn door $E_n = \hbar\omega n$, met $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

d) Bereken de quantummechanische partitiesom $Z_{QM}$ van dit deeltje.

e) Beargumenteer en bereken dat $Z = Z_{QM}$ indien $\tau >> \hbar\omega$.

## Opgave 4

Een bolvormig colloidaal deeltje (straal $a$, massa $m$, snelheid $\vec{v}(t)$ op tijdstip $t$) vertoont Brownse beweging in stilstaand water (op kamertemperatuur $T$ met viscositeit $\eta$). De diffusie coefficient van het deeltje is $D = k_B T/(6\pi\eta a)$. Geef een uitdrukking voor de typische (gemiddelde) snelheid $v$, gedefinieerd als $v^2 \equiv < \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) >$, en voor de typische tijdsduur $t_D$ die dit deeltje nodig heeft om zich te verplaatsen over een afstand $a$.

## Opgave 5

We beschouwen een macroscopisch systeem van $N$ identieke deeltjes in een volume $V$ bij temperatuur $\tau$. De interacties tussen de deeltjes zijn zodanig dat de kanonieke partitiesom in goede benadering gegeven wordt door

$$Z(N,V,T) = \frac{(V-Nb)^N}{N!\Lambda^{3N}} \exp(aN^2/(V\tau)), \tag{4}$$

met $a$ en $b$ positieve constanten, en $\Lambda$ de thermische golflengte.

a) Bereken de Helmholtz vrije energie $F(N,V,\tau)$, met gebruik making van de Stirling benadering.

b) Bereken de druk $p$ en de chemische potentiaal $\mu$.

c) Geef de orde van grootte van zowel $b$ als $\Lambda$ (uiteraard met eenheden), voor het geval dat het een atomair systeem betreft bij kamertemperatuur.

d) Dit systeem heeft een kritieke temperatuur $\tau_c$(die u hier niet hoeft uit te rekenen). Schets $p$ als functie van $V/N$ voor (i) $\tau > \tau_C$ en (ii) $\tau < \tau_C$, en beschrijf in een paar woorden voor beide gevallen hoe het systeem zich gedraagt wanneer het vanuit zeer verdunde toestand ($V/N >> b$) langzaam en isotherm gecomprimeerd wordt tot $V/N \approx b$.