1e deeltentamen TF1
8 november 2010
9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
Met elke opgave zijn 25 punten te verdienen.
Begin bij elke opgave op een **nieuw en los** vel papier met daarop uw naam.

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met T, en de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K. Ook gebruiken we de afkorting $\beta = 1/(k_B T)$. Indien nodig kunt u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro aan $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante aan $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u wel weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa.

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE PAGINA. GEBRUIK PER OPGAVE EEN NIEUW & LOS VEL PAPIER.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG —IN GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN AFSCHATTING VAN ~ 1 SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN GROOTTE.

Opgave 1
We beschouwen een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes in een zuiger onder een druk p op temperatuur T. Het gas is in evenwicht en homogeen verdeeld over de zuiger. De massa van elk puntdeeltje is m, en de totale massa van het gas is dus $M = Nm$. De snelheidsvector van een gegeven deeltje noemen we $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

(a) Geef een uitdrukking voor het volume V van het gas in de zuiger.

(b) Bereken, voor de gegeven temperatuur T, de goed genormeerde kansverdeling $f(v_x)$ voor de snelheidscomponent v_x van het gasdeeltje in de x-richting.

(c) Bereken de gemiddelde kinetische energie $\langle m\mathbf{v}^2/2\rangle$ van dit deeltje.

We beschouwen nu een subvolume xV van hetzelfde gas van N deeltjes in een totaal volume V. Dus de kans dat een gegeven deeltje in dit subvolume zit is x en de kans dat het er buiten zit is $(1-x)$. Uiteraard geldt $x \in [0,1]$.

(d) Geef de kans $P(n)$ dat er precies n deeltjes in het subvolume zitten, voor $0 \leq n \leq N$.

(e) Bereken, of beredeneer, het gemiddeld aantal deeltjes $\langle n\rangle$ in het subvolume?

Opgave 2 —begin op een nieuw vel s.v.p.
We beschouwen een deeltje dat in *drie* toestanden $s = 1, 2, 3$ kan verkeren met energieën ϵ_s zodanig dat $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$. Met andere woorden: toestand 1 is de grondtoestand, en toestand 3 de hoogst aangeslagen toestand. Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

(a) Bereken de kansen P_1, P_2, en P_3 dat dit deeltje in toestand 1, 2, en 3 zit, respectievelijk.

(b) Bereken de gemiddelde energie $u(T)$ van dit deeltje.

(c) Bereken uit (b), of beredeneer met fysische argumenten, zowel de hoge-T als de lage-T limiet van $u(T)$.

We beschouwen nu N van zulke deeltjes op vaste posities in een kristal. Het kristal is thermisch geïsoleerd van de omgeving, en we noemen het totaal aantal microtoestanden van het kristal Ω.

(d) Bereken Ω.

(e) Als nu gegeven is dat de totale energie van het kristal gelijk is aan $E = N\epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)$, bereken dan de multipliciteit.

Z.O.Z. VOOR HET VERVOLG

Opgave 3 —begin op een nieuw vel s.v.p.
Een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes ondergaat de zgn. Carnot cyclus ABCDA die is opgebouwd uit (i) de isothermen AB en CD bij gegeven temperaturen T_h en T_l, respectievelijk, en (ii) de adiabaten BC en DA. We nemen aan dat $T_h > T_l$, en dat $V_B > V_A$ met V_A en V_B de gegeven volumina van het gas in de toestanden A en B, respectievelijk. Het aantal deeltjes N is ook gegeven en verandert niet tijdens deze reversibele cyclus. U mag gebruiken dat de energie van het gas bij temperatuur T voldoet aan $U = (3/2)Nk_BT$.

(a) Bereken de hoeveelheid warmte Q die het gas opneemt tijdens de isotherme expansie AB.

(b) Laat zien dat (infinitesimale) veranderingen dT en dV van de temperatuur T en het volume V, respectievelijk, op de adiabaten aan elkaar gerelateerd zijn volgens

$$\frac{dT}{T} + \frac{2}{3}\frac{dV}{V} = 0. \tag{1}$$

(c) Bereken, bijv. met behulp van (b), het volume V_C van het gas in toestand C.

(d) Wat is de door het gas geleverde arbeid W gedurende de cyclus ABCDA?

(e) Geef de entropie verandering ΔS van het gas per cyclus ABCDA.

Opgave 4 —begin op een nieuw vel s.v.p.
Een of ander thermodynamisch systeem wordt beschreven door de enthalpie $H(S,p) = cSp^2$, met $c > 0$ een constante, S de entropie, en p de druk. Zoals u weet geldt $H = U + pV$ met U de (interne) energie en V het volume. Het aantal deeltjes kan vast worden verondersteld.

(a) Gebruik de Eerste Hoofdwet om de differentiaal dH uit te drukken.

(b) Bereken T en V als functie van S en p.

(c) Is H extensief, intensief, of geen van beide? En T? Beargumenteer of bereken uw antwoord.

(d) Bij vaste druk p wordt aan dit systeem een hoeveelheid warmte Q toegevoerd. Bereken de bijbehorende entropie verandering ΔS.

(e) We wensen het systeem nu te beschrijven in termen van de onafhankelijke variabelen S en V. Geef de bijbehorende Legendre transformatie van $H(S,p)$ naar $U(S,V)$, en bereken $U(S,V)$.

EINDE